MU4MEN01 : TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Cours 1 : rappels sur le temps continu

14 septembre 2021

Sylvain Argentieri

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Introduction et rappels

Notion de signal

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Un signal est le **support** d'une **information**

Support : grandeur physique

- tension
- courant
- ...

On traite souvent de grandeurs électriques, disponibles en sortie de **capteurs**.

Information : grandeur abstraite

- noms des personnes présentes
- ordres vocaux
- ...

Cette information peut prendre la forme de texte, d'une action, etc.

speech →  → text

Notion de traitement du signal

L'étude des signaux est une discipline à part entière, ayant pour objectif la **création**, l'**analyse** et la **transformation** des signaux pour leur exploitation, souvent rendue difficile par la présence de **bruit**.

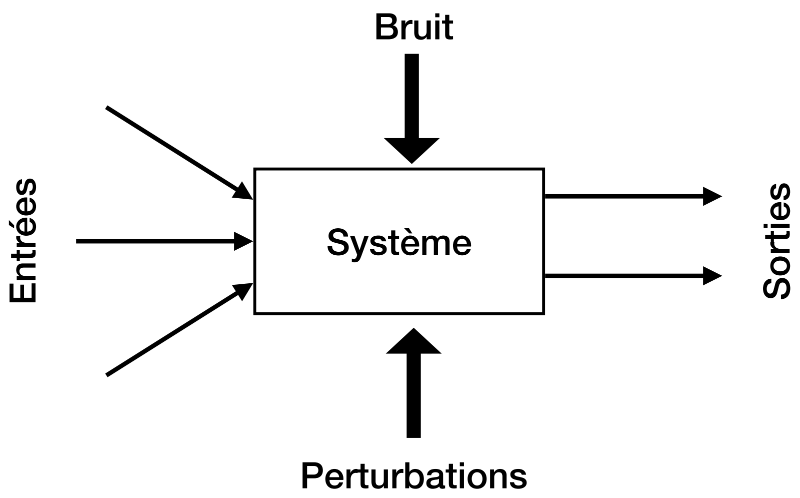
- **Création** : synthèse de signaux, souvent par combinaison élémentaire, ou par modulation pour des applications de transmission ;
- **Analyse** : interprétation des signaux, pour par exemple :
  - récupérer seulement les composantes utiles du signal,
  - identifier, classer les signaux.

L'outil principal est l'**analyse de Fourier**.

- **Transformer** : c'est le rôle des systèmes (analogiques ou numériques), qui prennent très souvent la forme de filtres.

Notion de système

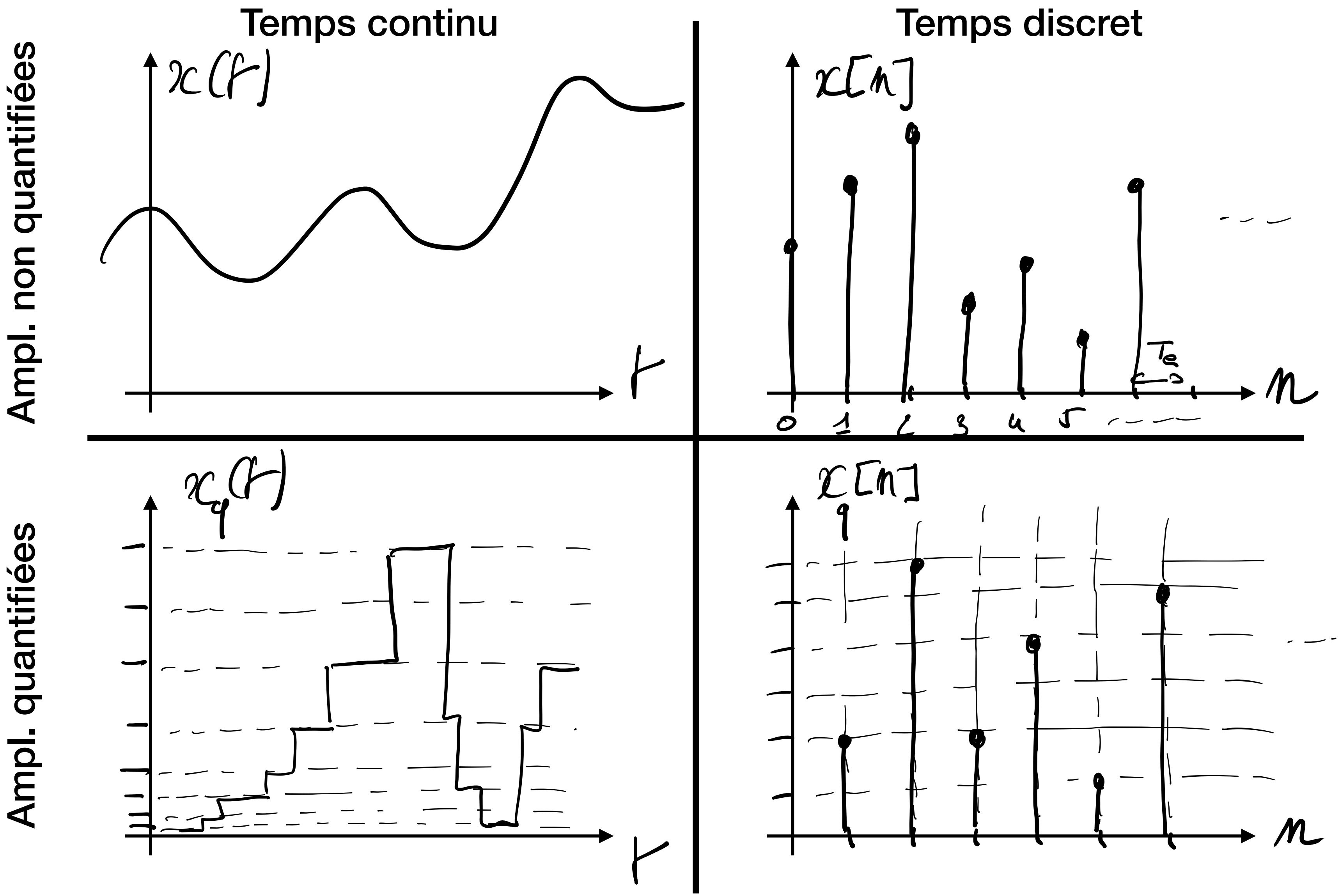
Beaucoup de systèmes physiques (électriques, mécaniques, chimiques, biologiques, etc.) peuvent être décrits naïvement par le schéma suivant :



Un système est alors vu comme un **opérateur** appliqué à des **sollicitations** (en *entrée*) qui produit alors une ou plusieurs **réponses** (en *sortie*).

- **Prédiction** : peut-on prévoir quelle sera la réponse du système à une sollicitation ?
- **Caractérisation** : de quoi est composé un système fournissant un type de réponse à une sollicitation donnée ?
- **Sythèse** : comment modifier la réponse d'un système à une sollicitation donnée ?

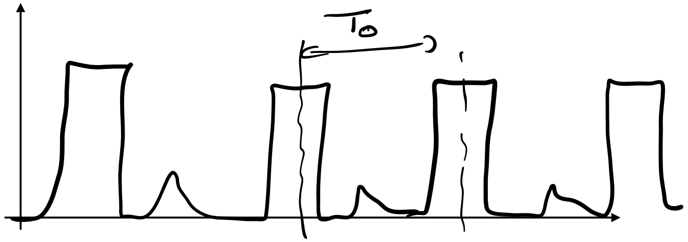
Classification morphologique des signaux + notations



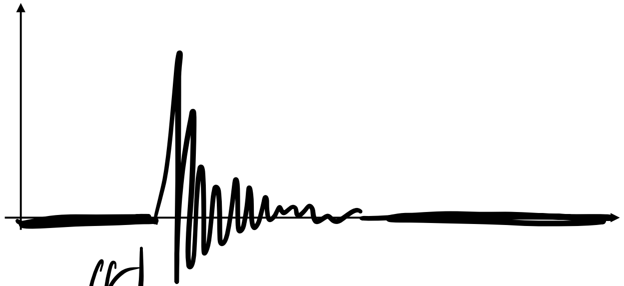
Classification phénoménologique

Il existe différents types de signaux selon le phénomène (physique) qui leur a donné naissance :

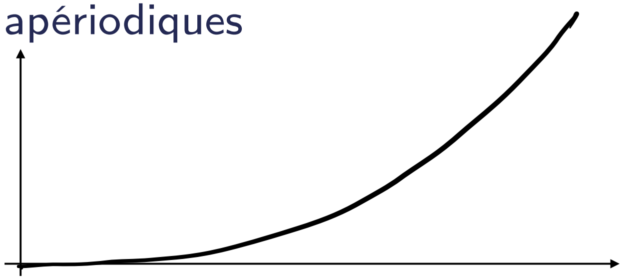
- **Signaux déterministes** : signaux dont l'évolution dans le temps / l'espace / etc. est totalement décrite à l'aide d'une équation. Ces signaux peuvent alors être :
  - T_0-périodiques : $x(t + T_0) = x(t)$



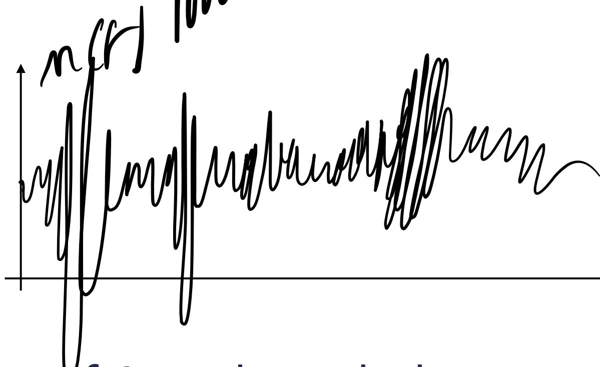
  - transitoires



  - apériodiques



  -



- **Signaux aléatoires** : signaux dont l'évolution se fait au hasard, dont on ne peux pas donner la valeur à un instant/endroit/etc. donné. Ils sont alors caractérisés par des grandeurs statistiques (moyenne, variance, etc.)

Classification énergétique des signaux

On définit les caractéristiques suivantes :

- Puissance instantanée :

$$P(t) = |x(t)|^2$$

- Puissance moyenne : (moyenne de la puissance instantanée)

$$P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} P(t)\mathrm{d}t = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

- Energie : (somme des puissances instantanées)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

- Si $E_x < +\infty$ le signal est **à énergie finie**. C'est en pratique le cas de tous les signaux physiquement réalisables. Ces signaux sont alors à **puissance nulle**.
- Si $P_x < +\infty$ et $\neq 0$, le signal est **à puissance finie**. C'est le cas des signaux périodiques. Ces signaux sont alors à **énergie infinie**.

Etude et analyse des signaux périodiques

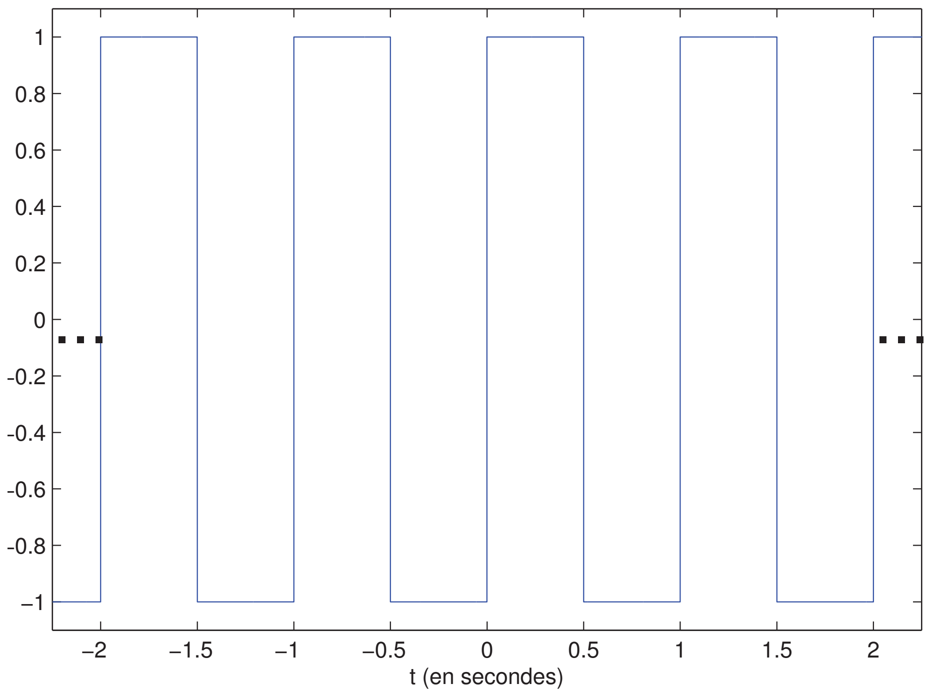
Caractérisation temporelle (1/2)

Dans le temps, un signal T_0-périodique est caractérisé par la répétition tous les T_0 du même motif, de sorte que :

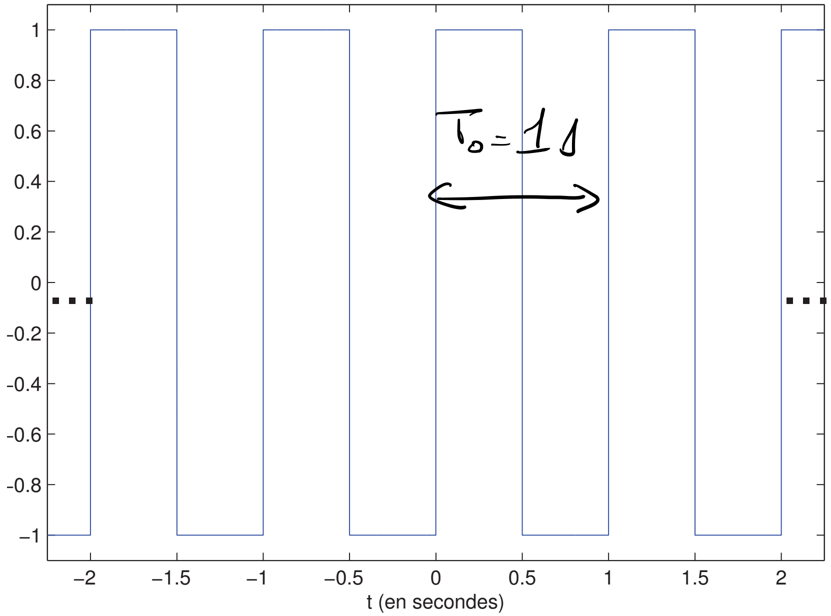
$$x(t+T_0) = x(t-T_0) = x(t+32T_0) = x(t).$$

T_0 est appelé la **période du signal**. Strictement, ce sont des signaux à support temporel non borné et vérifient $E_x = +\infty$.

Exemple :



Caractérisation temporelle (1/2)



Définition mathématique du signal :

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < T_0/2 \\ -1 & \text{si } T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$$

$$\text{et } x(t + nT_0) = x(t), \forall n$$

Calcul de sa puissance moyenne P_x :

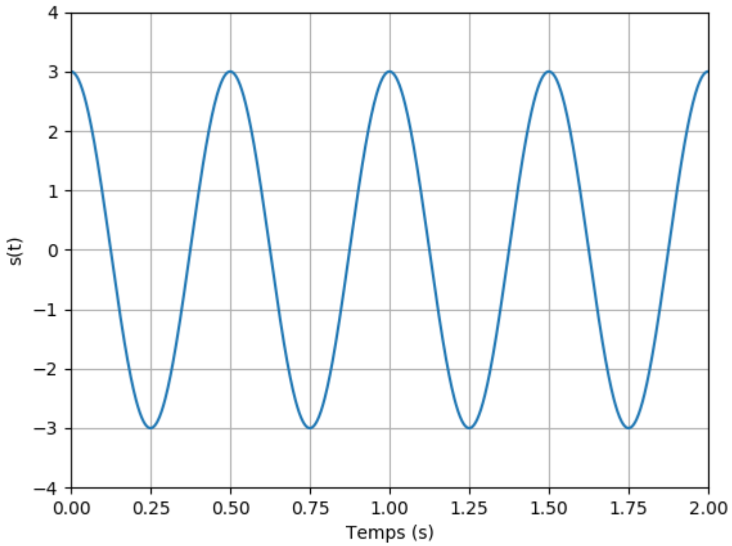
$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |x_{T_0}(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{T_0/2} 1^2 dt + \int_{T_0/2}^{T_0} (-1)^2 dt\right)$$

$$= \frac{1}{T_0}\left([t]_0^{T_0/2} + [t]_{T_0/2}^{T_0}\right) = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{2}\right) \Rightarrow P_x = 1$$

Caractérisation fréquentielle : notion de fréquence (1/3)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

En physique, la fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit par unité de temps. Dans le Système international d'unités la fréquence s'exprime en **hertz** (Hz). Exemple :



- Période T_0 du signal :

  $T_0 = 0{,}5\,s$

- Fréquence f_0 du signal :

  $f = 2\ \cancel{s}$ Hz

Fréquence

$$f = \frac{1}{T}$$

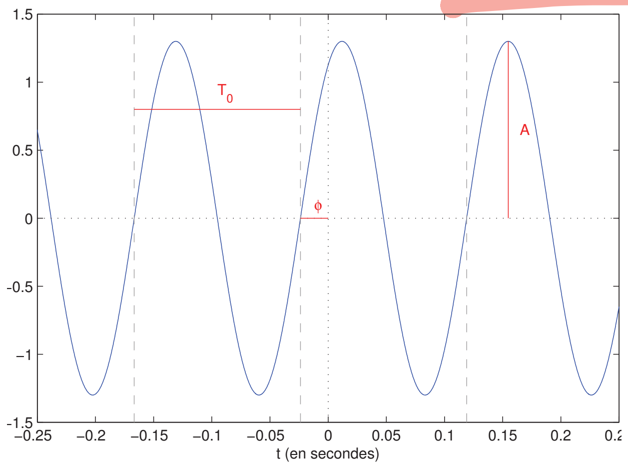
$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}5} = 2$

Caractérisation fréquentielle : notion de fréquence (2/3)

Tous les signaux périodiques sont-ils tous caractérisés par une seule fréquence ?

- **NON** : Joseph Fourier montra en 1811, en travaillant sur des expériences de modélisation de la diffusion de la chaleur, que tout signal périodique pouvait s'exprimer **sous la forme d'une somme (possiblement infinie) de signaux sinusoidaux** de fréquences différentes ;
- le signal sinusoidal revêt donc une importance capitale :

$$x_{T_0}(t) = A\sin(2\pi F_0 t + \varphi)$$

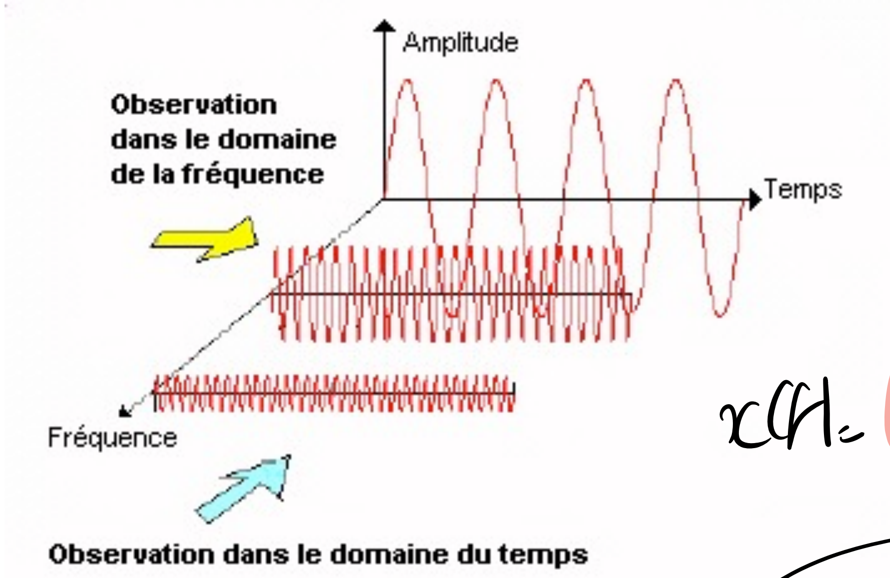


- A : amplitude
- F_0 : fréquence **fondamentale**
- φ : phase à l'origine

https://zestedesavoir.com/tutoriels/2451/les-signaux-sinusoidaux-en-physique/les-signaux-sinusoidaux/

Caractérisation fréquentielle : notion de fréquence (3/3)

On peut donc imager 2 représentations **totalement** identiques

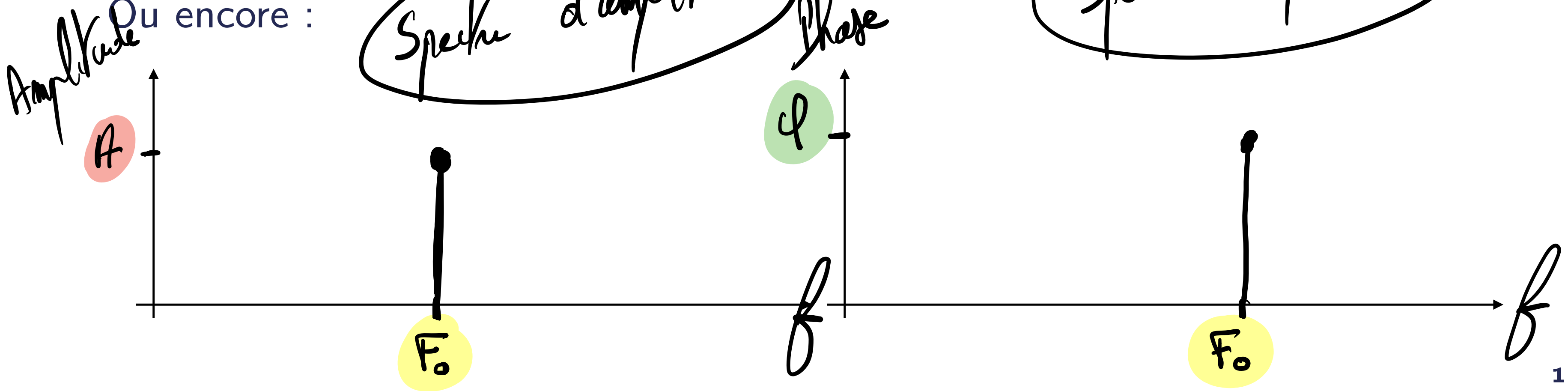


$x(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \varphi)$

Ou encore :

Spectre d'amplitude

Spectre de phase



Série de Fourier (1/2)

» Illustration sous Matlab dans le domaine Audio.

Définition (réelle)

$$x_{T_0}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k F_0 t) + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \sin(2\pi k F_0 t)$$

avec :

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{(T_0)} x_{T_0}(t)\cos(2\pi k F_0 t)\mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{(T_0)} x_{T_0}(t)\sin(2\pi k F_0 t)\mathrm{d}t$$

Un signal périodique quelconque est donc constitué d'une somme infinie de sinus et cosinus, de fréquences multiples de $F_0 = 1/T_0$, la **fréquence fondamentale**.

Mais la représentation en sin *et* cos *n'est pas la plus simple à interpréter. On y préfère la définition complexe ...*

Série de Fourier (2/2)

Définition (complexe)

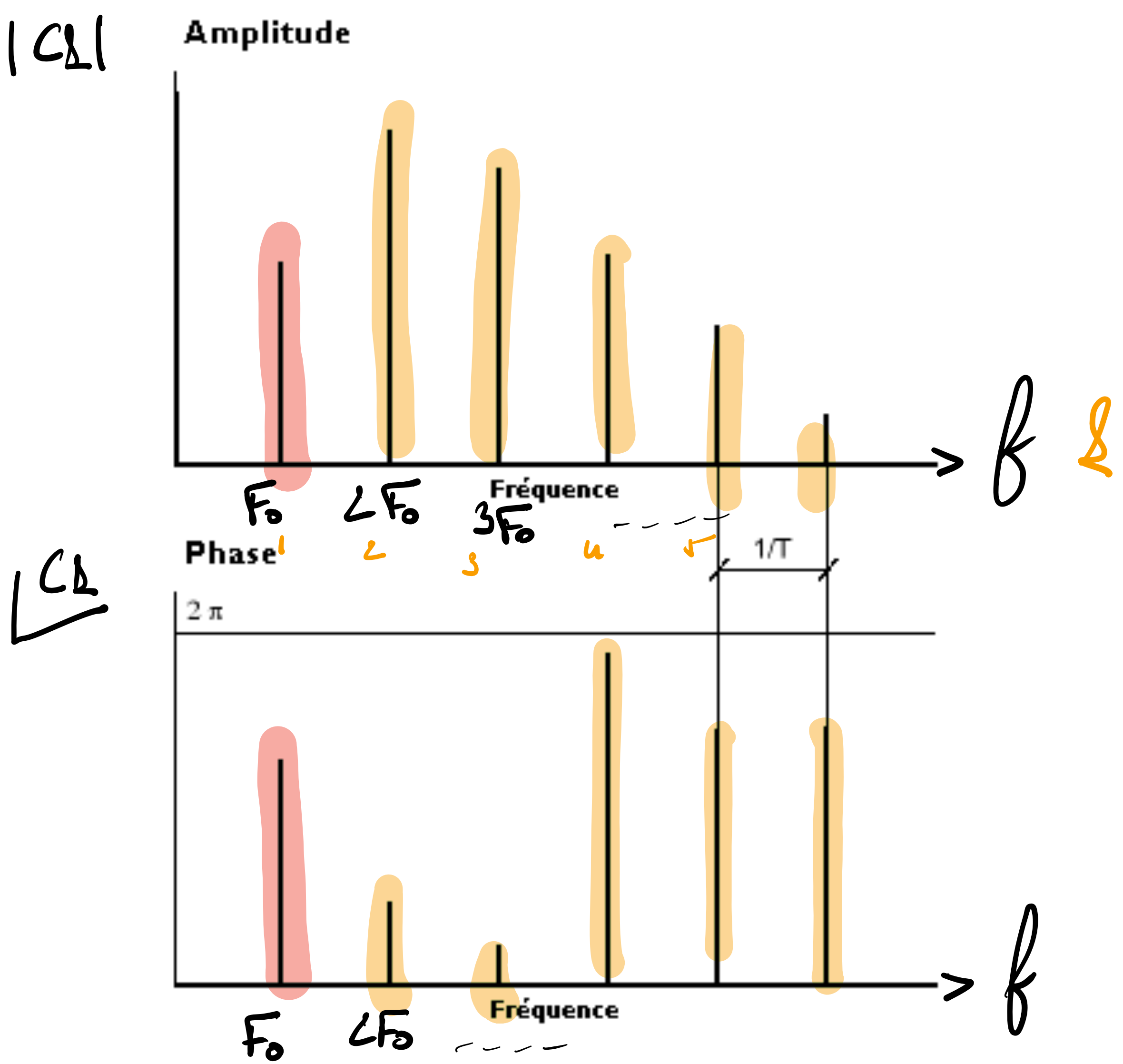
$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t},$$

avec :

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x_{T_0}(t) e^{-j2\pi kF_0 t} \mathrm{d}t$$

- Les c_k sont appelés les **coefficients de la série de Fourier**, et sont des **nombres complexes** ;
- Chaque coefficient c_k possède donc un module et une phase, représentant l'amplitude et la phase de la composante à la fréquence kF_0 au sein du signal $x_{T_0}(t)$;
- La signature spectrale des signaux périodiques et donc un **spectre de raies**.

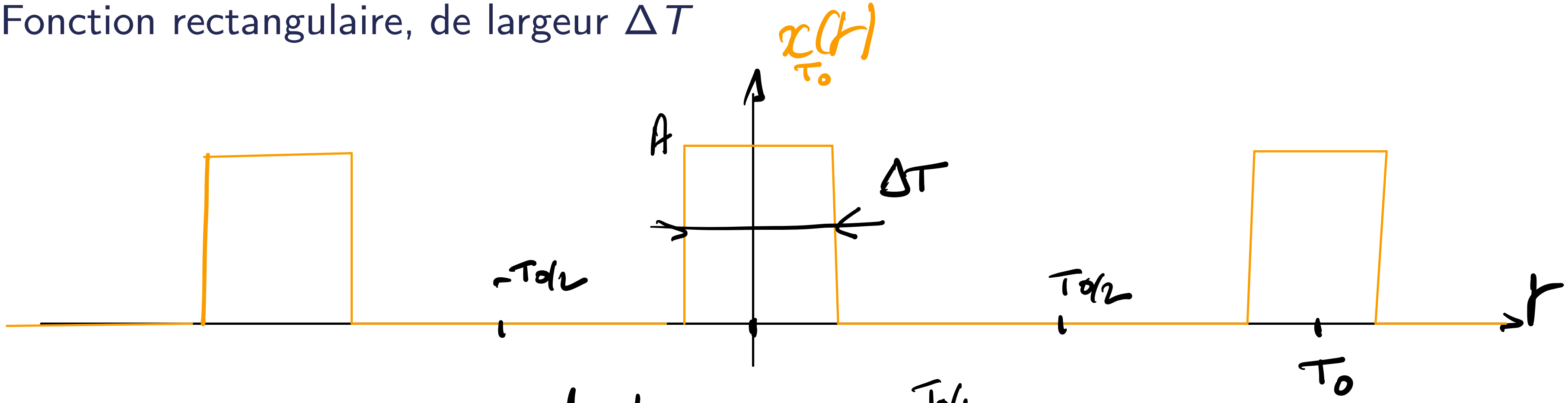
Spectre de raies



Notions de fréquences **fondamentale** et d'**harmoniques**.

Exemple de calcul

Fonction rectangulaire, de largeur ΔT



$$c_\ell = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x_{T_0}(t)\, e^{-j2\pi \ell F_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t)\, e^{-j2\pi \ell F_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} A\, e^{-j2\pi \ell F_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\left[\frac{1}{-j2\pi \ell F_0}\, e^{-j2\pi \ell F_0 t}\right]_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}}$$

Exemple de calcul

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

$$C_\ell = \frac{A}{\cancel{T_0}} \cdot -\frac{1}{j\,2\pi\ell \cancel{F_0}} \left(e^{-j\ell\pi F_0 \Delta T} - e^{+j\ell\pi F_0 \Delta T} \right)$$

$=1$

$$\left(\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right)$$

$$\Rightarrow C_\ell = \frac{A}{\ell\pi} \sin(\ell\pi F_0 \Delta T)$$

sinus cardinal

Donc :

$$\boxed{C_\ell = A F_0 \Delta T \frac{\sin(\ell\pi F_0 \Delta T)}{\ell\pi F_0 \Delta T}}$$

$$\left(F_0 = \frac{1}{T_0} \right)$$

Exemple de calcul

Appl. numériques

$F_0 = 1\,kHz \rightarrow T_0 = 1\,ms$

$A = 5$

$\Delta T = 0{,}2\,ms$

$C_0 = 1$

$C_1 = 0{,}94$

$C_2 = 0{,}76$

$C_3 = 0{,}5$

Vérification qualitative

`https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Fourier/fourier1.html`

- La série de Fourier permet d'analyser les fréquences présentes au sein d'un signal périodique ...
- ... mais elle permet également d'en fabriquer, d'en **synthétiser** !
- Et si strictement un signal périodique est constitué d'une infinité d'harmoniques, en pratique, seul un "petit " nombre est nécessaire pour le caractériser.

Conclusion

Signaux périodiques : à retenir

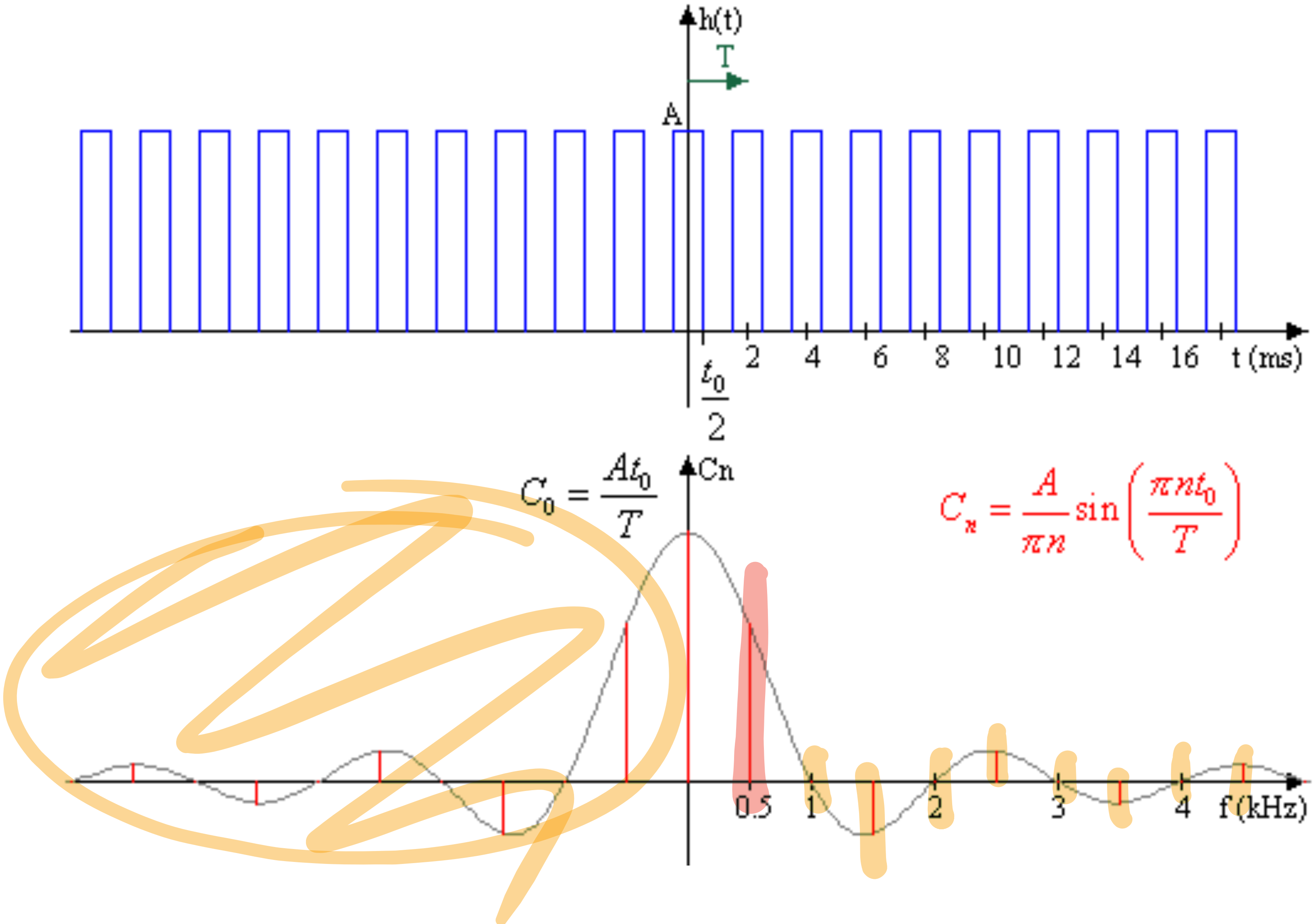
- Un signal T_0-périodique est un signal pour lequel un motif se répète dans le temps (ou l'espace, ou ...)
- Tout signal périodique peut se décomposer en une somme possiblement infinie de sinus et de cosinus (ou d'exponentielle complexe), de fréquences mutiples de $F_0 = 1/T_0$
- Le contenu fréquentiel d'un signal périodique est toujours constitué :
  - d'une fréquence fondamentale $F_0 = 1/T_0$,
  - de fréquences harmoniques $F = kF_0, k \in \mathbb{Z}$

  On parle alors de **spectre de raies**.
- Les 2 représentations temporelles/fréquentielles sont **totalement équivalentes**.

Etude et analyse des signaux apériodiques : la transformée de Fourier

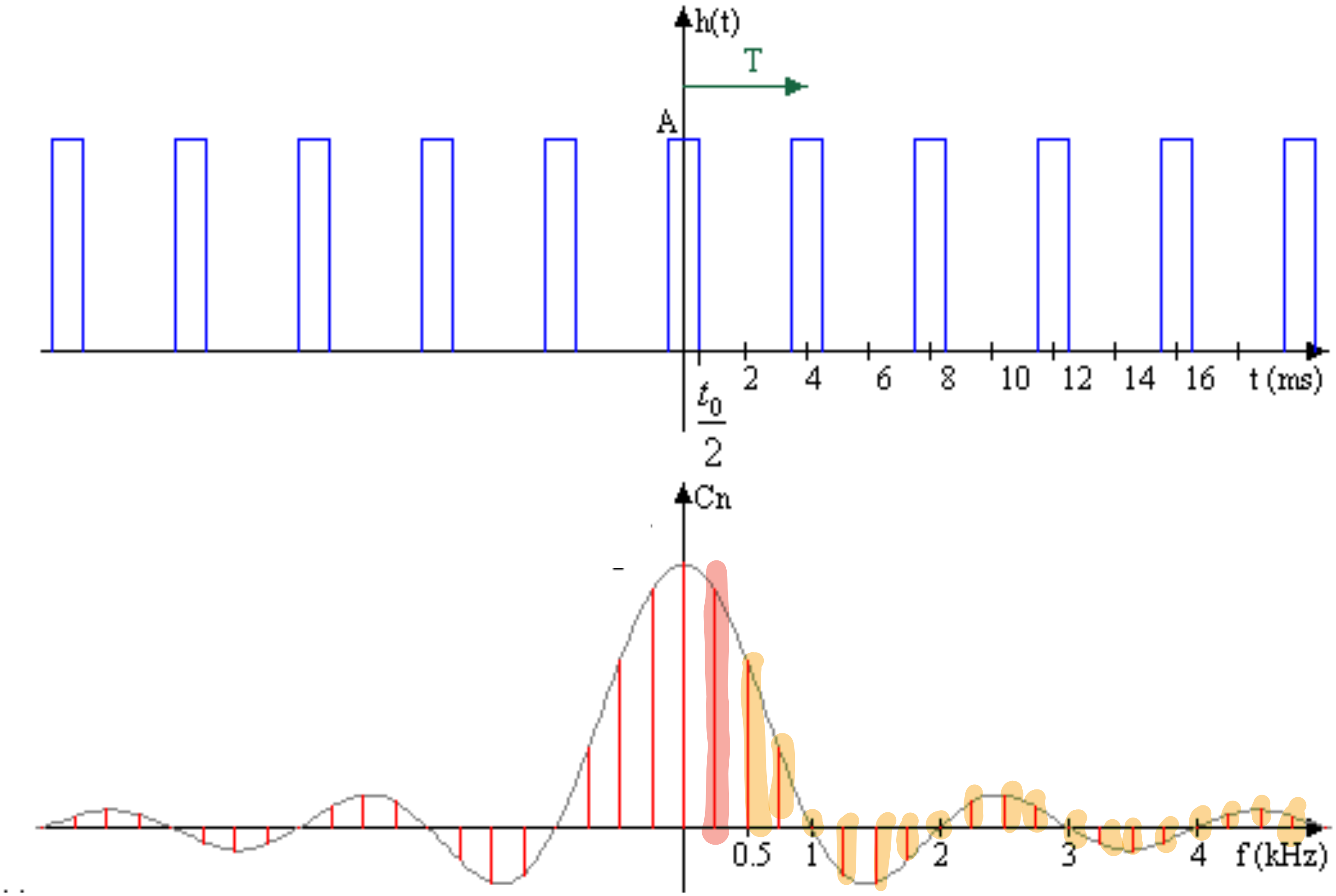
Du signal périodique au signal non périodique (1/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ



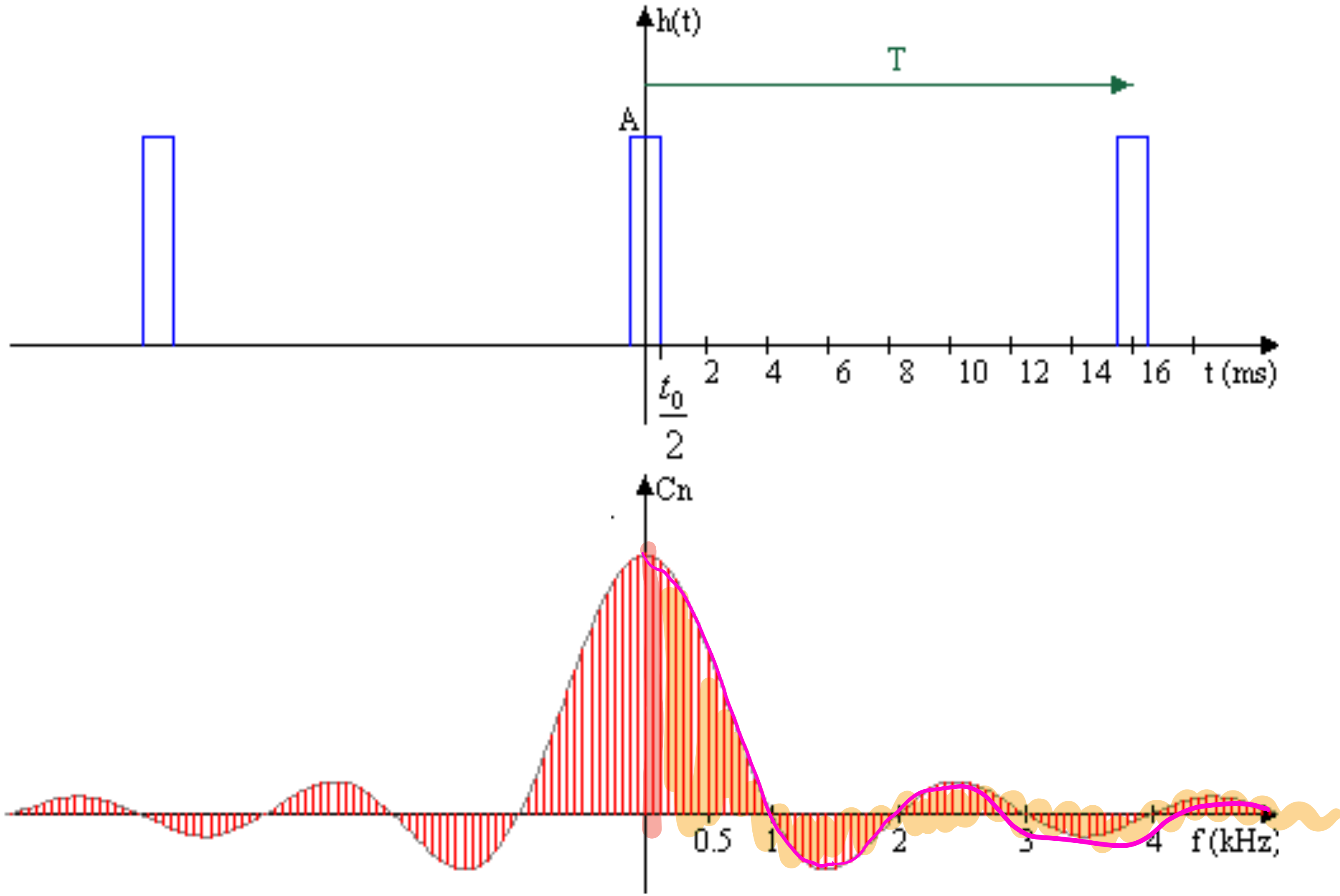
Du signal périodique au signal non périodique (1/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ



Du signal périodique au signal non périodique (1/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ



Du signal périodique au signal non périodique (2/2)

Mathématiquement, on peut alors écrire :

$$x_{T_0}(t) = \sum_{l} c_l \, e^{j2\pi l F_0 t} \quad \text{et} \quad c_l = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt$$

- $\underline{T_0 \to +\infty} \Longrightarrow c_l \to 0 \ldots$

$$\Rightarrow T_0 c_l = \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt}$$

- $\underline{T_0 \to +\infty}$: $F_0 = \frac{1}{T_0} \to df$

$$\text{et } l F_0 \to f$$

$$\text{et } T_0 c_l \to \underbrace{X(f)}$$

Du signal périodique au signal non périodique (2/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Donc
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

et on a :

$$x(t) = \lim_{T_0 \to +\infty} x_{T_0}(t) = \lim_{T_0 \to +\infty} \underbrace{\sum_{\ell}}_{\int} \underbrace{F_0}_{df} \underbrace{T_0 C_\ell}_{X(f)} e^{j2\pi \underbrace{\ell F_0}_{f} t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Transformée de Fourier

Définition : Transformée de Fourier des Signaux Continus (TFSC))

$$TFSC[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

Remarques :

- La TFSC est une transformation linéaire :

$$TFSC[ax(t) + by(t)] = aX(f) + bY(f)$$

- La TFSC est une grandeur continue en fréquence, à opposer à la série de Fourier qui ne faisait apparaitre que des fréquences discrètes (multiples de la fondamentale)
- $X(f) \in \mathbb{C}$: la TFSC possède donc un module et une phase . . . comme toutes les représentations fréquentielles !

Transformée de Fourier : propriétés

- Décalage temporel :

$$TF[x(t-\tau)] = X(f)\, e^{-j2\pi f\tau}$$

↳ le module du spectre du signal décalé en temps n'est pas modifié !

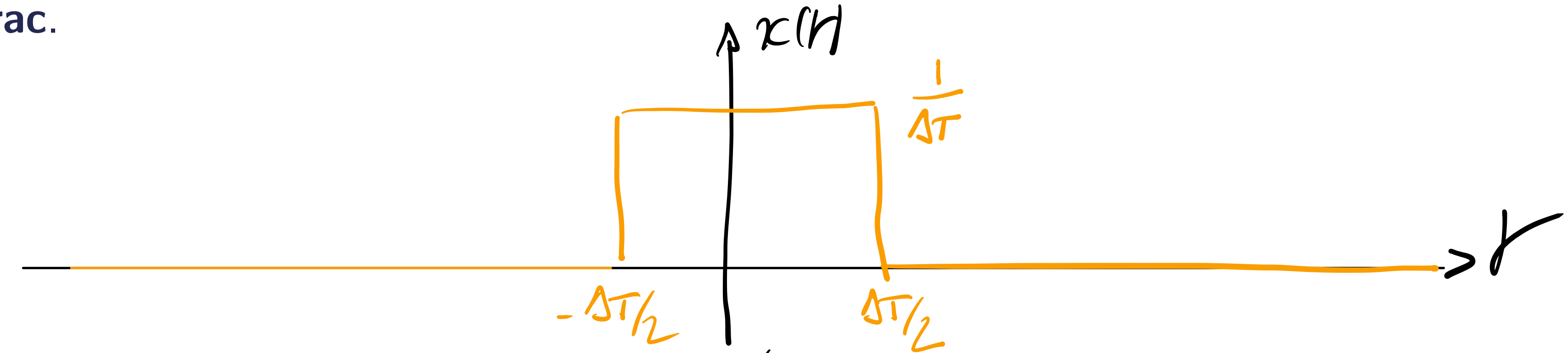
- Relation de Parseval :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

Transformée de Fourier : exemple et interprétation

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Passage de la fonction rectangle périodique . . . à une “fonction” particulière : **le Dirac**.



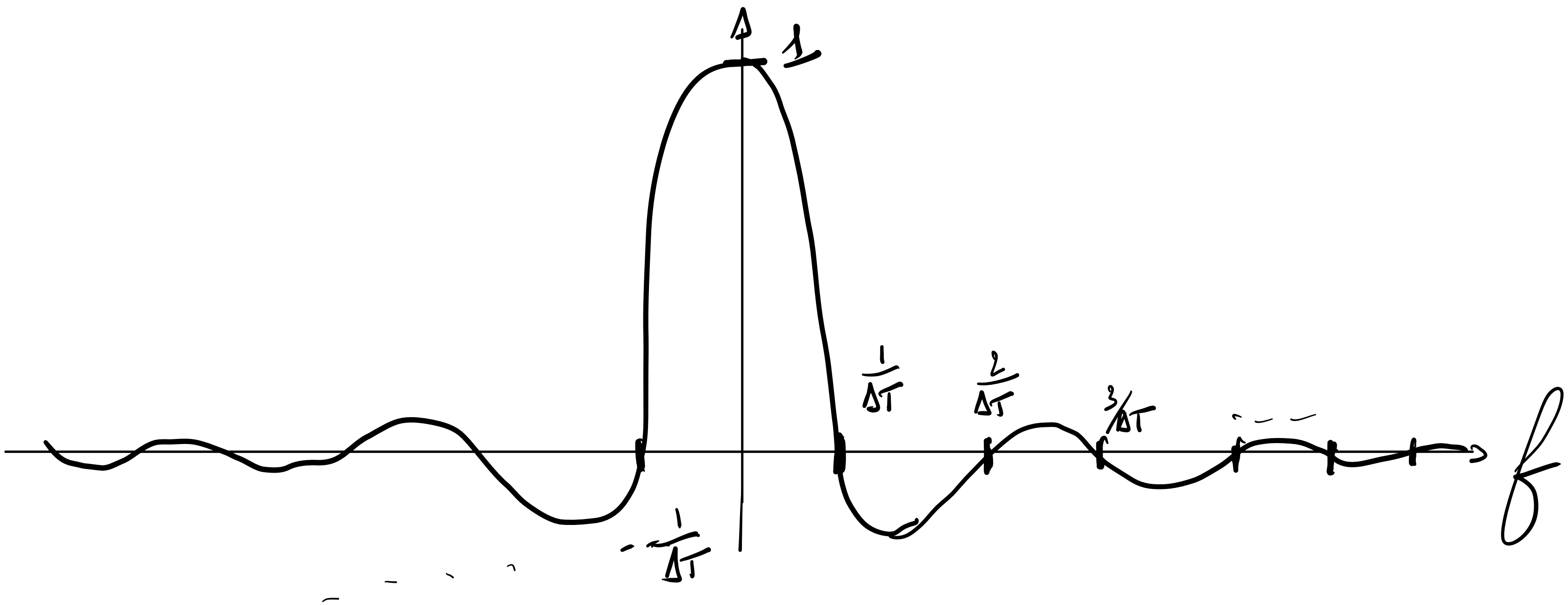
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \frac{1}{\Delta T}\, e^{-j2\pi f t}\, dt.$$

$$= \frac{1}{\Delta T}\left[\frac{1}{-j2\pi f}\, e^{-j2\pi f t}\right]_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} = \frac{1}{-\Delta T\, j2\pi f}\left(e^{-j\pi f \Delta T} - e^{+j\pi f \Delta T}\right)$$

Transformée de Fourier : exemple et interprétation

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

$$\Rightarrow \boxed{X(f) = \frac{\sin(\pi f \Delta T)}{\pi f \Delta T}}$$



Transformée de Fourier : exemple et interprétation

- Si $\Delta T \to 0$: alors $x(t) \to \delta(t)$

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0, \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1.$$

On a $\boxed{X(f) = 1}$

- Si $\Delta T \to +\infty$: alors $x(t) \to 1$

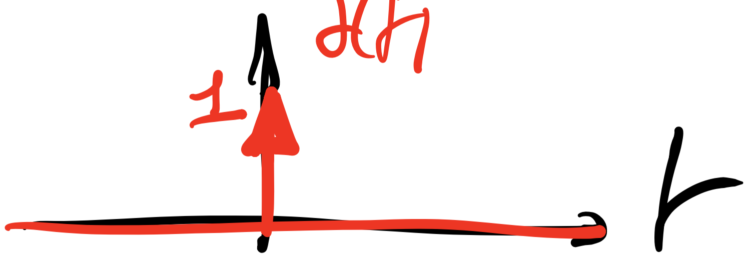
et on a $\boxed{X(f) \to \delta(f)}$

Quelques transformées de Fourier à connaître

Signal $x(t)$	TFSC $X(f)$	Allure $\lvert X(f)\rvert$
$\delta(t)$	1	
1	$\delta(f)$	
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$	
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$	
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$	
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$	

$\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$



Question : transformée de Fourier d'un cosinus ou sinus, qui sont des signaux périodiques ?

Conclusion

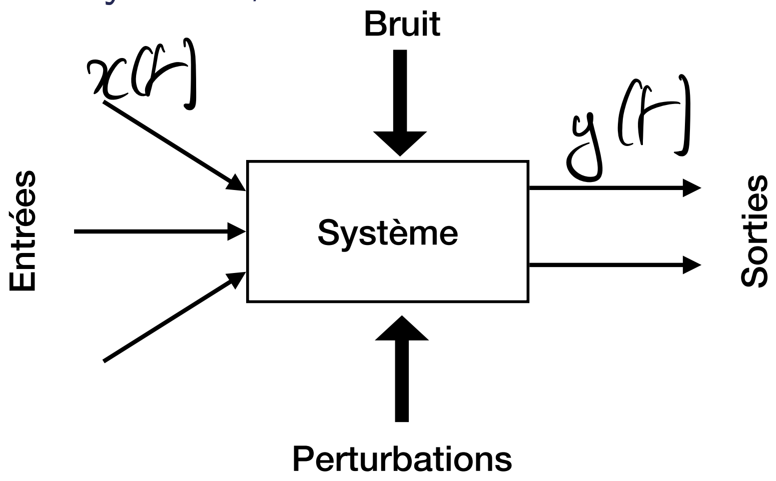
Transformée de Fourier : à retenir

- Sa définition : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$
- Le contenu fréquentiel d'un signal est caractérisé par son amplitude $|X(f)|$ … et sa phase $\angle X(f)$, *qui est en général peu étudiée/représentée* ;
- Le contenu fréquentiel d'un signal non périodique est une **courbe continue** en fréquence : toutes les fréquences peuvent y être présentes, avec plus ou moins d'importance ;
- Les 2 représentations temporelles/fréquentielles sont **totalement équivalentes**.

Etude et analyse des systèmes analogiques : un pas vers les filtres

Systèmes : introduction

Un système, c'est :



Relation fondamentale entrée/sortie :

$$y(t) = H[x(t)]$$

Hypothèses :

- Linéarité : $H[\alpha x_1(t) + x_2(t)] = \alpha y_1(t) + y_2(t)$
- Invariance $H[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$
- \+ Stabilité :
  si $|x(t)| < A$, alors $|y(t)| < B$.
- \+ Causalité : si $x(t) = 0$ pour $t < t_0$, alors $y(t) = 0 \ \forall\, t < t_0$.

Relation E/S dans le domaine temporel : l'équation différentielle

Les systèms continus linéaires et invariants vérifient une équation différentielle du type (où, par convention, $a_n = 1$) :

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t} + a_{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-2} y(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_0 y(t) = b_m\frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + b_0 x(t)$$

- Représentation générique ... mais peu exploitable dans le cas général
- Un système est entièrement caractérisé par la connaissance des coefficients $(a_{n-1}, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0)$
- Pour résoudre ce type d'équation, on a généralement besoin des **conditions initiales** du systèmes, par exemple :

$$y(0) = 1, \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ etc.}$$

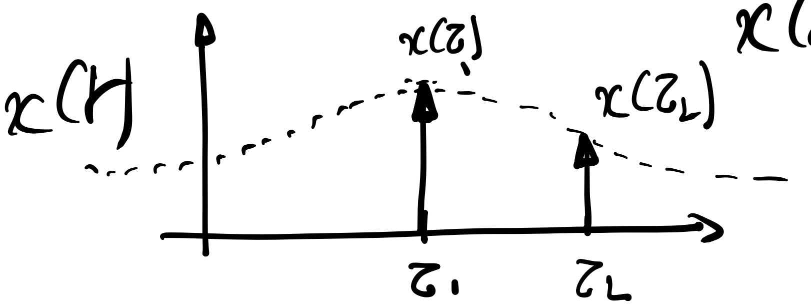
Relation E/S dans le domaine temporel : le produit de convolution (1/2)

Parmi toutes les réponses d'un système, une est particulièrement importante : la réponse à un Dirac $\delta(t)$, appelée **réponse impulsionnelle** :

$$h(t) = H[\delta(t)]$$

Un système est **entièrement caractérisé** par sa réponse impulsionnelle :

Entrée $x(t)$	Sortie $y(t)$
$\delta(t)$	$h(t)$
$\delta(t-\tau)$	$h(t-\tau)$: invariance
$x(\tau)\delta(t-\tau)$	$x(\tau)\, h(t-\tau)$: linéarité
$\underbrace{\int x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau}_{x(t)}$	$\underbrace{\int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}_{y(t)}$: linéarité



Relation E/S dans le domaine temporel : le produit de convolution (2/2)

Produit de convolution

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Propriétés :

- Élément neutre : $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- Commutativité : $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$
- Translation temporelle : $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

La convolution est sympatique . . . mais là encore peu exploitable en pratique !

Relation E/S dans le domaine fréquentiel : la réponse en fréquence

Réponse en fréquence

$$Y(f) = H(f)X(f), \text{ avec } H(f) = \text{TFSC}[h(t)].$$

- La convolution (dans le temps) est remplacée par une multiplication (en fréquence)
- Le contenu fréquentiel de la sortie $Y(f)$ est obtenu par pondération de celui de l'entrée $X(f)$, via la fonction complexe $H(f)$:
  - chaque fréquence voit son importante augmenter ou diminuer selon la valeur de $|H(f)|$
  - chaque fréquence voit sa phase modifiée selon $\angle H(f)$
- Selon l'allure de $|H(f)|$, on pourra donc qualifier le système de **filtre**, puisqu'il pourra supprimer ou amplifier certaines fréquences présentes dans le signal d'entrée pour constituer le signal de sortie.

Malheureusement, la transormée de Fourier de certains signaux n'existent pas . . . on introduit donc une nouvelle transformation.

On introduit :

$$z(t) = x(t)\, e^{-\sigma t} \qquad (\sigma > 0)$$

$$\Rightarrow Z(f,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-(\sigma + j2\pi f)t}\, dt$$

$\in \mathbb{C}$, noté p.

$$Z(f,\sigma) = \cancel{Z}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$X(p) =$

Relation E/S dans le domaine fréquentiel : la fonction de transfert (1/3)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Transformée de Laplace

$$\mathrm{TL}[x(t)] = X(p) = \int x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

- $p \in \mathbb{C}$ est la **variable de Laplace**. On l'appelle aussi **fréquence complexe**.
- On a *presque toujours* :

$$X(f) = X(p)|_{p=j2\pi f}$$

- La transformée de Laplace apparaît donc comme une **généralisation** de la transformée de Fourier.

Propriétés : pour ainsi dire identiques à celles de la TF.

- Dérivation :

$$\mathrm{TL}\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right] = pX(p) - x(0)$$

$$\mathrm{TL}\left[\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t}\right] = p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}\frac{\mathrm{d}^1 x(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} - \ldots - \frac{\mathrm{d}^{n-1}x(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$$

Relation E/S dans le domaine fréquentiel : la fonction de transfert (2/3)

Retour à l'équation différentielle :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots$$

$\Big\downarrow$ TL + conditions initiales = 0

$$p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \cdots = b_m p^m X(p) + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0} = H(p)$$

Relation E/S dans le domaine fréquentiel : la fonction de transfert (3/3)

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- La convolution se transforme toujours en multiplication (ouf !)
- Les fonctions de transfert prennent la forme d'une fraction rationnelle
- Les racines du numérateur sont appelés les **zéros** du systèmes. Les racines du dénominateur sont appelés les **pôles** du système.

Stabilité

Un système est stable si et seulement si ses pôles sont à partie réelle strictement négative

Conclusion (1/2)

Etude des systèmes : à retenir

Dans le temps, un système continu, linéaire et invariant d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ est caractérisé par :

- son équation différentielle ou sa réponse impulsionnelle $h(t)$,
- sa relation de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$.

En fréquence, ce même système est caractérisé par :

- sa réponse en fréquence $H(f)$, de sorte que $Y(f) = H(f)X(f)$
- sa fonction de transfert $H(p)$, de sorte que $Y(p) = H(p)X(p)$

Conclusion (2/2)

Lien entre toutes ces grandeurs :