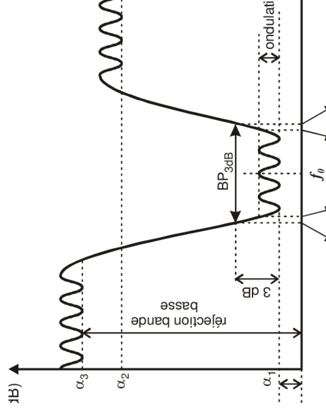
MU4MEN01 : TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE

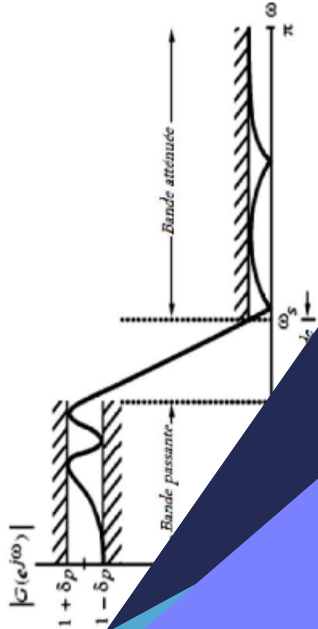
Cours 6 : synthèse des filtres numériques

23 novembre 2021

Sylvain Argentieri

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

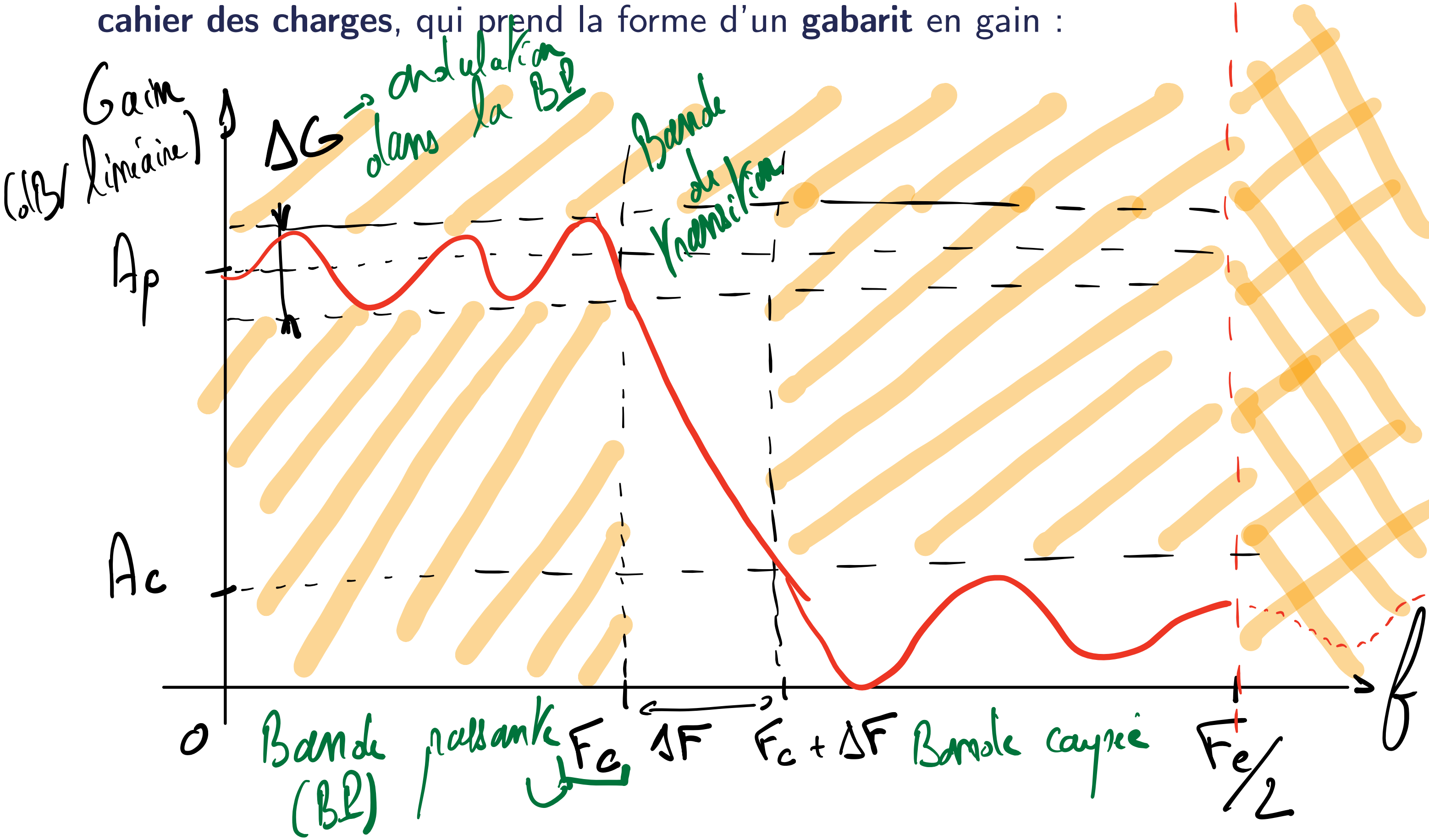




Introduction

Objectif de la synthèse

Généralement, la conception d'un filtre numérique s'effectue sur la base d'un **cahier des charges**, qui prend la forme d'un **gabarit** en gain :



Processus de conception

La synthèse d'un filtre numérique consiste à déterminer les valeurs (et le nombre) de coefficients a_k et b_k qui apparaissent dans son équation de récurrence ou sa fonction de transfert. Pour cela, sur la base du gabarit souhaité :

- on décide de travailler un filtre de type RIF ou RII ;
- on détermine l'ordre du filtre nécessaire pour respecter le gabarit ;
- on calcule les coefficients du filtre, selon les méthodes présentées dans la suite (ou d'autres encore !) ;
- on vérifie que le filtre ainsi obtenu respecte les spécifications demandées.

En pratique . . .

Tous les types de filtres (passe-haut, passe-haut, passe-bande, coupe-bande) peuvent être synthétisés, mais on peut les "remplacer" par la conception d'un filtre passe-bas : nous nous concentrerons donc sur ces filtres dans la suite.

Dans la suite ...

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

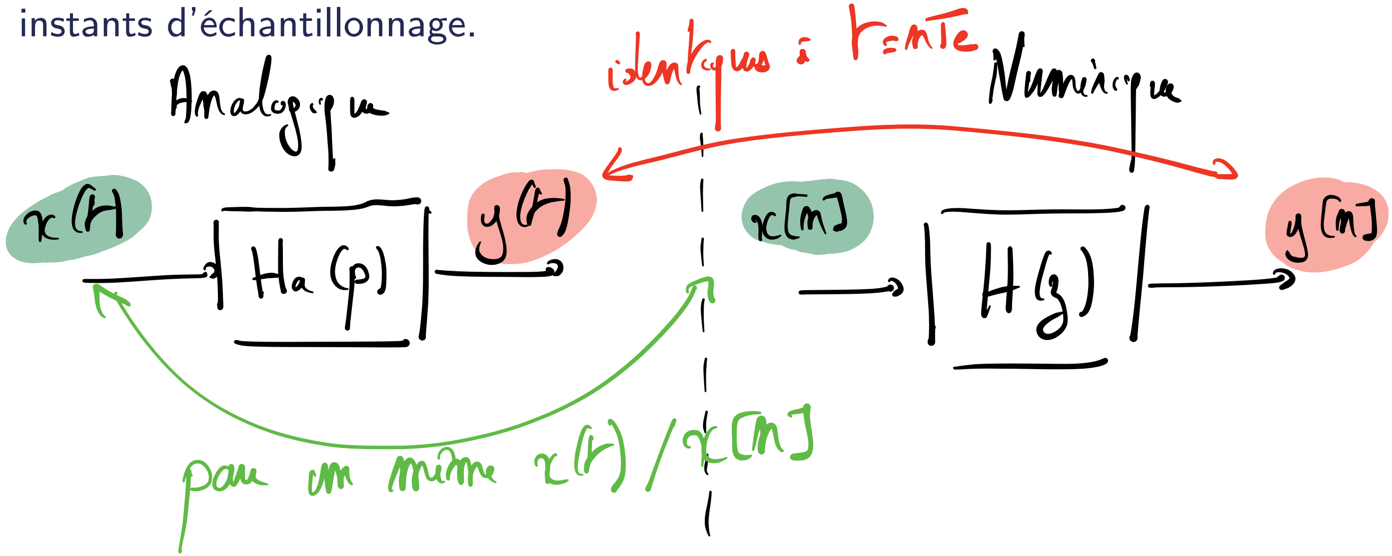
... nous ne présenterons que les méthodes de synthèse **des filtres RII**.

Synthèse des filtres RII par invariance temporelle

Objectif des méthodes de synthèse par invariance temporelle

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Pour beaucoup de méthodes de synthèse RII, l'idée est de partir d'un filtre analogique dont on souhaite **reproduire le comportement temporel** aux instants d'échantillonnage.



Si cette idée peut être appliquée pour n'importe qu'elle réponse, en pratique on essaie de préserver :

- la réponse impulsionnelle, $x(t) = \delta(t) \Leftrightarrow x[n] = \delta[n]$
- ou la réponse indicielle. $x(t) = u(t) \Leftrightarrow x[n] = u[n]$.

Synthèse par invariance impulsionnelle : définition

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

On part d'un filtre analogique, de réponse en fréquence $H_a(f)$ et de réponse impulsionnelle $h_a(t) = \mathrm{TFSC}^{-1}[H_a(f)]$. Alors, on pose :

Invariance impulsionnelle

$$h[n] = h_a(nT_e)$$

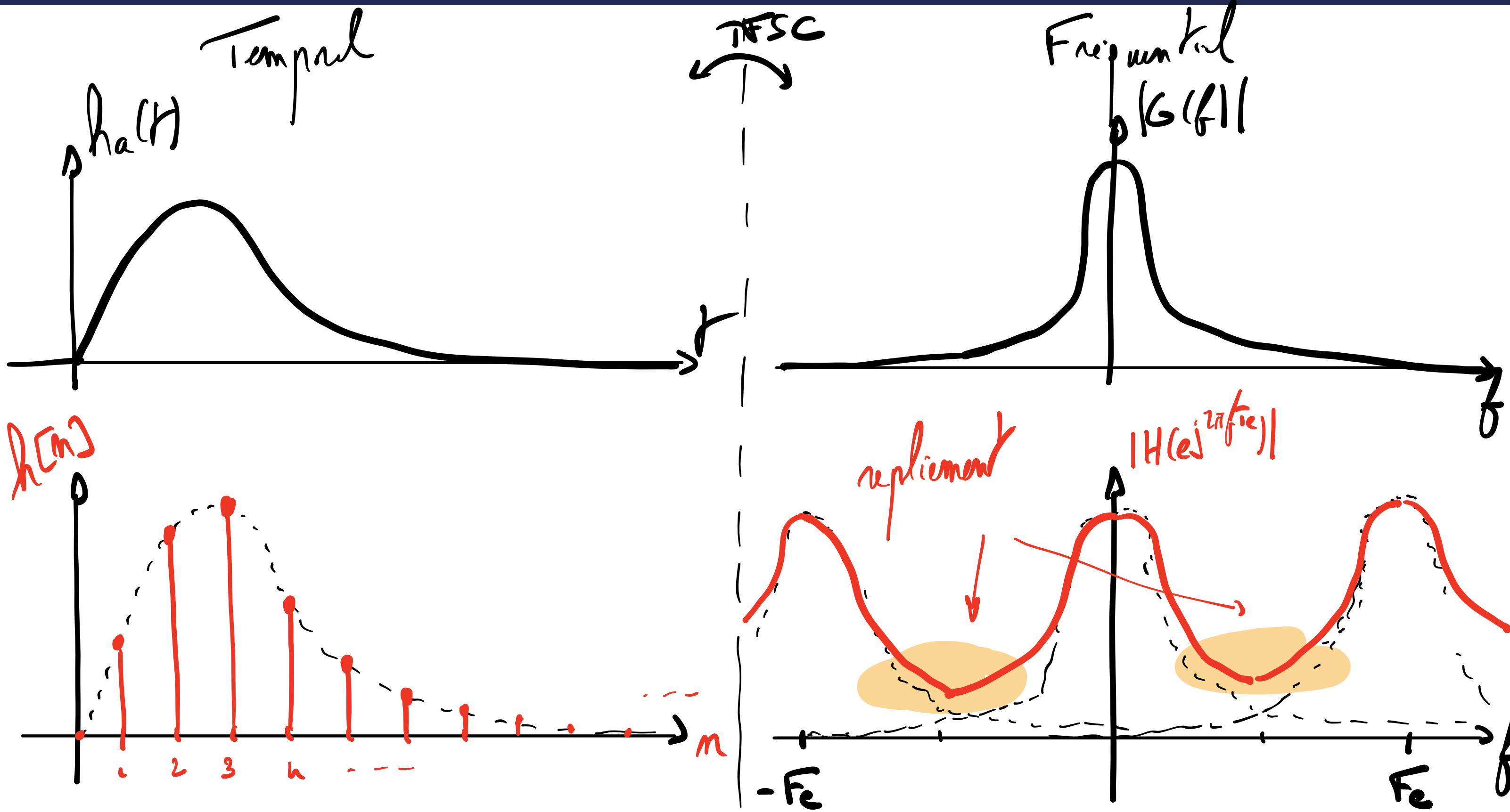
En d'autres termes : *la réponse impulsionnelle du filtre RII souhaité $h[n]$ est égale à la réponse impulsionnelle du système analogique $h_a(t)$ aux instants d'échantillonnage*.

Alors la réponse en fréquence $H(e^{j2\pi f T_e})$ du filtre numérique obtenu s'écrit :

Réponse en fréquence pour l'invariance impulsionnelle

$$H(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{1}{T_e} \sum_k H_a(f - kF_e)$$

Synthèse par invariance impulsionnelle : représentation



» Une bonne similitude en temps **ne garantit pas** une bonne similitude en fréquence !

Synthèse par invariance impulsionnelle : calculs (1/2)

Exemple : soit le filtre de fonction de transfer $H_a(p) = \frac{1}{1+\tau p}$. Déterminer le filtre obtenu par invariance à la réponse impulsionnelle.

Par la formule on a : $h_a(t) = TL^{-1}\left[\frac{1}{1+\tau p}\right] = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$.

Donc : $h[n] = h_a(nTe)$

$$= \frac{1}{\tau} e^{-n\frac{Te}{\tau}} u(nTe) = \frac{1}{\tau} e^{-\alpha n} u[n]$$

$$\left(\alpha = \frac{Te}{\tau}\right)$$

$\downarrow TZ$

$$H(z) = TZ\left[\frac{1}{\tau} e^{-\alpha n} u[n]\right]$$

Synthèse par invariance impulsionnelle : calculs (2/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

$$H(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\tau} e^{-\alpha n} \cancel{u[n]} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{\tau} \sum_{n \geq 0} \left(e^{-\alpha} z^{-1}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$\downarrow TZ^{-1}$

$$y[n] = \frac{1}{\tau} x[n] + e^{-\alpha} y[n-1]$$

Synthèse par invariance impulsionnelle : stabilité

Dans l'exemple précédent on constate que :

$$p_a = -\frac{1}{\tau} \longrightarrow p_d = e^{-T_e/\tau}$$

Plus généralement, **pour les pôles seulement**, on peut montrer que :

$$p_d = e^{p_a T_e}.$$

Stabilité

Si le filtre analogique est stable ($\mathrm{Re}(p_a) < 0$) alors le filtre numérique synthétisé par invariance à la réponse impulsionnelle est stable également ($|e^{p_a T_e}| < 1$).

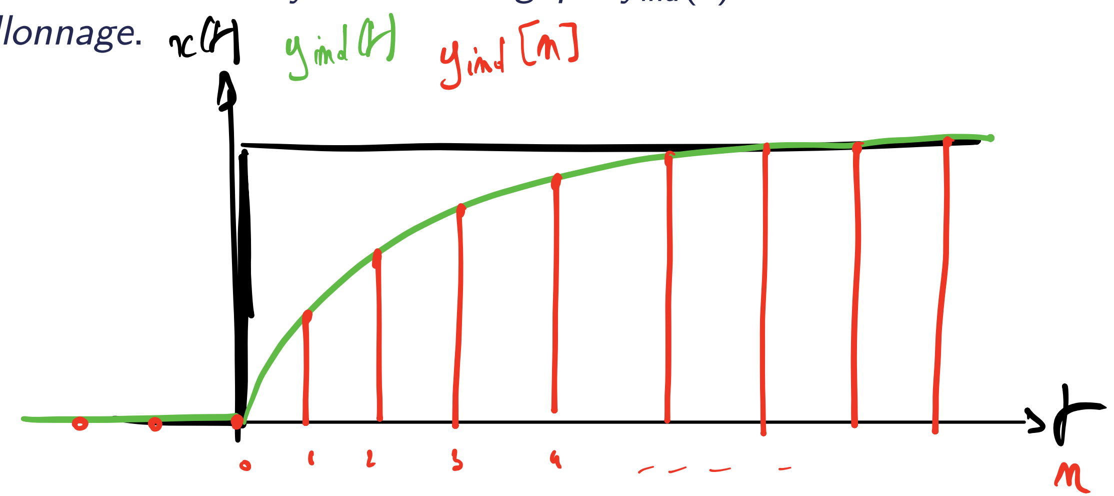
Synthèse par invariance indicielle : définition

On part d'un filtre analogique, de réponse en fréquence $H_a(f)$ et de réponse indicielle $y_{\text{ind}}(t) = \text{TL}^{-1}[H_a(p)\frac{1}{p}]$. Alors, on pose :

Invariance indicielle

$$y_{\text{ind}}[n] = y_{\text{ind}}(nT_e)$$

En d'autres termes : *la réponse indicielle du filtre RII souhaité $y_{ind}[n]$ est égale à la réponse indicielle du système analogique $y_{ind}(t)$ aux instants d'échantillonnage.*



Synthèse par invariance indicielle : calculs

Cet exercice sera détaillé dans le TD4. Dans les grandes lignes :

① On trouve $y_{ind_a}(t)$: $Y_{ind}(p) = H_a(p) \cdot \underbrace{X(p)}_{= \frac{1}{p}}$

$\Rightarrow y_{ind_a}(t) = TL^{-1}[Y_{ind}(p)] = TL^{-1}\left[\frac{H_a(p)}{p}\right]$

② On en déduit : $y_{ind}[n] = y_{ind_a}(nT_e)$

③ On calcule $Y_{ind}(z) = TZ[y_{ind}[n]]$

④ On en déduit $H(z)$: $Y_{ind}(z) = H(z) \cdot U(z)$

$= H(z) \cdot \frac{z}{z-1}$

$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{z-1}{z} Y_{ind}(z)}$

Synthèse des filtres RII
par transformation de p vers z

Principe des méthodes de transforation de p vers z

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Soit un filtre analogique, de fonction de transfert $H(p)$, dont nous souhaitons réaliser un équivalent numérique. Or, nous avions vu (*voir le cours sur la TZ*) :

$$H(p) = H(z)\big|_{z=e^{pT_e}}.$$

→*Nous avions vu que cette équivalence "transformait" le demi-plan droit du plan complexe des p en un disque de rayon 1 dans le plan complexe des z.*

On pourrait donc poser la transformation :

$$p \longrightarrow \ln(z)/T_e\,,$$

...qui conduit alors à une fonction de transfert numérique non rationnelle ...

Nous allons donc devoir trouver d'autres transformations de p vers z qui s'approchent le plus possible de $z = e^{pT_e}$ et qui conduisent à une fonction de transfert rationnelle.

Équivalence à la dérivation (1/3)

Les équations différentielles régissent l'évolution des systèmes continus (linéaire et invariants). L'idée est de remplacer la dérivée qui y apparait par une approximation numérique :

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=nT_e} \approx \frac{y(nT_e) - y(nT_e - T_e)}{T_e} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T_e}$$

Comment alors relier p à z ?

analogique | numérique

$$\frac{dy_a(t)}{dt} \xrightarrow{TL} p\,Y_a(p) \qquad\qquad \frac{y[n]-y[n-1]}{T_e} \xrightarrow{TZ} \frac{1-z^{-1}}{T_e}\,Y(z)$$

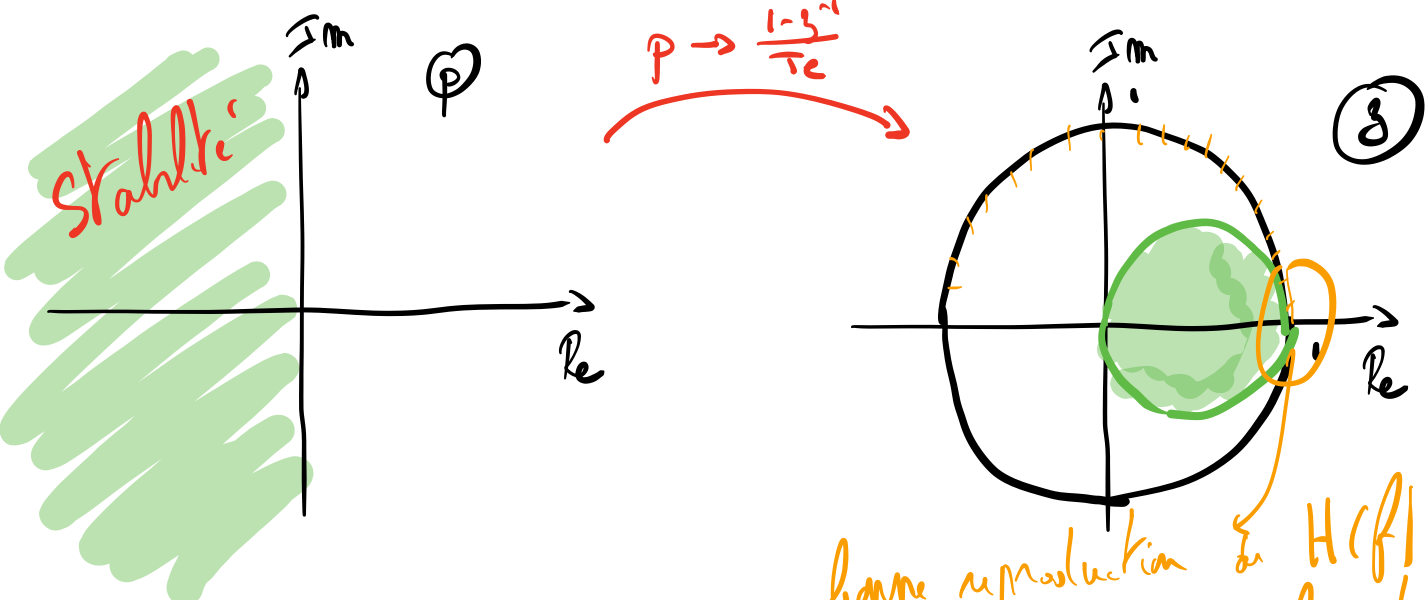
On note $p \longmapsto \dfrac{1-z^{-1}}{T_e}$

Équivalence à la dérivation (2/3)

De cette façon, chaque pôle (ou zéro) analogique en $p = p_k$ est donc remplacé par un pôle (ou zéro) en

$$z_k = \frac{1}{1 - p_k T_e}$$

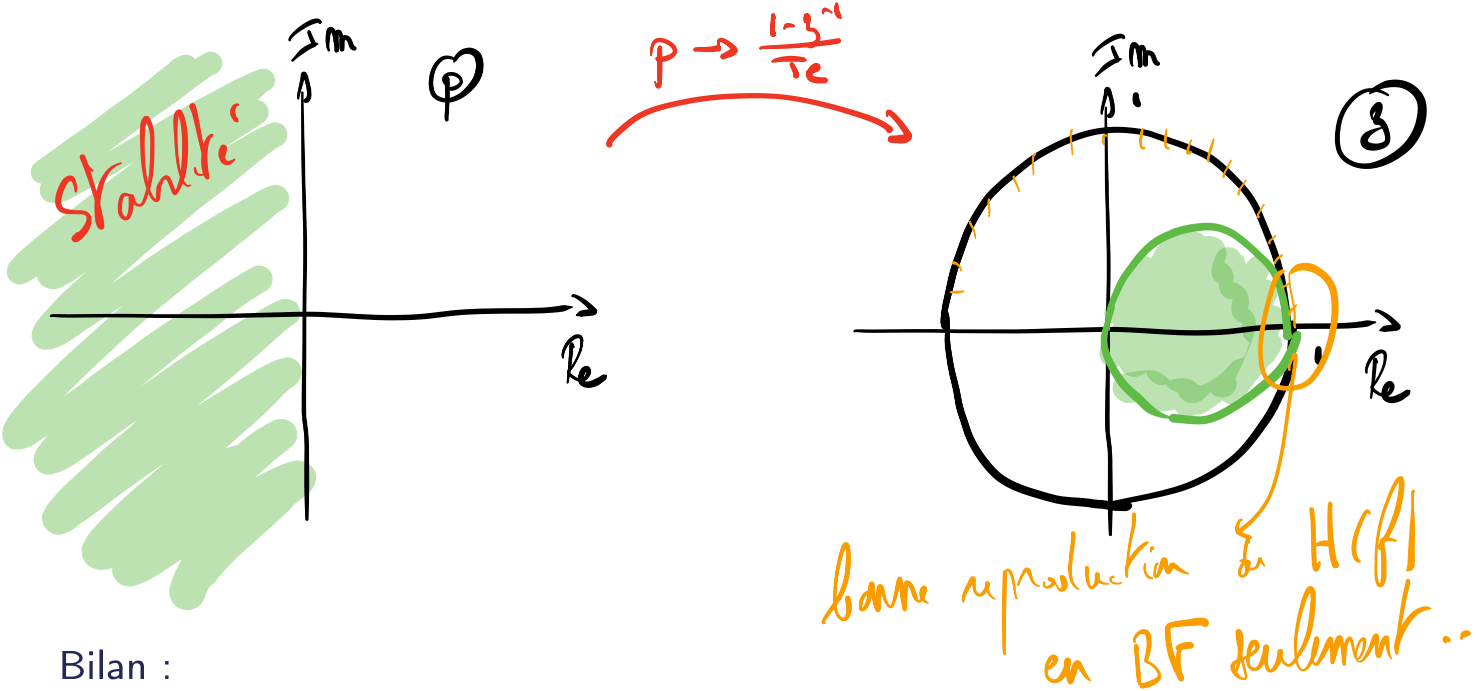
Dans le plan complexe, on peut montrer que cela revient à :



bonne reproduction de H(f) en BF seulement...

Équivalence à la dérivation (3/3)

Dans le plan complexe, on peut montrer que cela revient à :



Bilan :

- si le système analogique est stable, son équivalent numérique l'est aussi ;
- mais le comportement en fréquence du filtre numérique obtenu ne ressemble à celui du filtre analogique qu'en basses fréquences.

Équivalence à la dérivation **progressive**

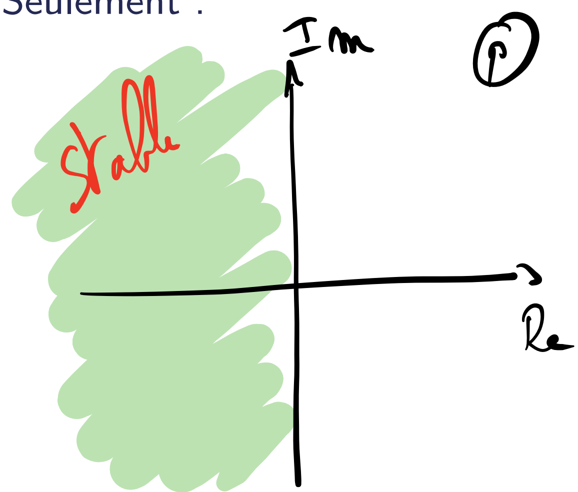
On aurait pu aussi poser :

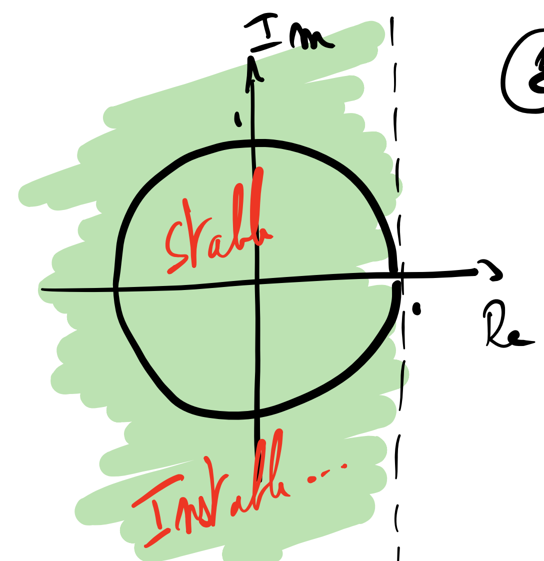
$$\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=nT_e} \approx \frac{y[n+1]-y[n]}{T_e}.$$

Ce qui aurait conduit à l'équivalence :

$$p \longrightarrow \frac{z-1}{T_e}.$$

Seulement :

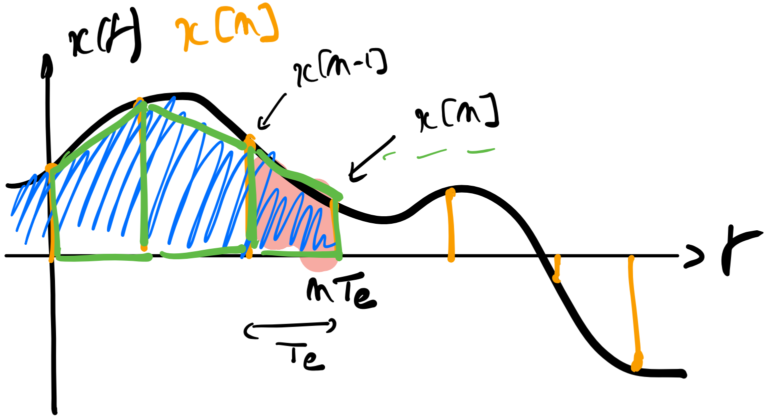


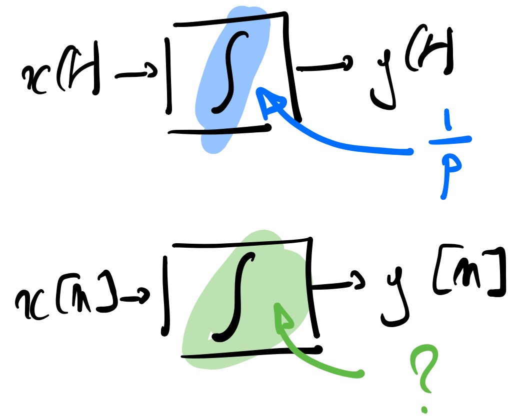


Équivalence à l'intégration (1/3)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

On essaie cette fois d'approximer le résultat $y[n]$ de l'intégration d'un signal $x[n]$ par un système numérique de fonction de transfert $H(z)$.





Cela conduit à l'approximation suivante :

$$y[n] = y[n-1] + \left(x[n-1] + x[n]\right) \times \frac{T_e}{2}$$

$$\Big\downarrow \; TZ$$

$$H(z) = \frac{T_e}{2} \, \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \iff \frac{1}{p}$$

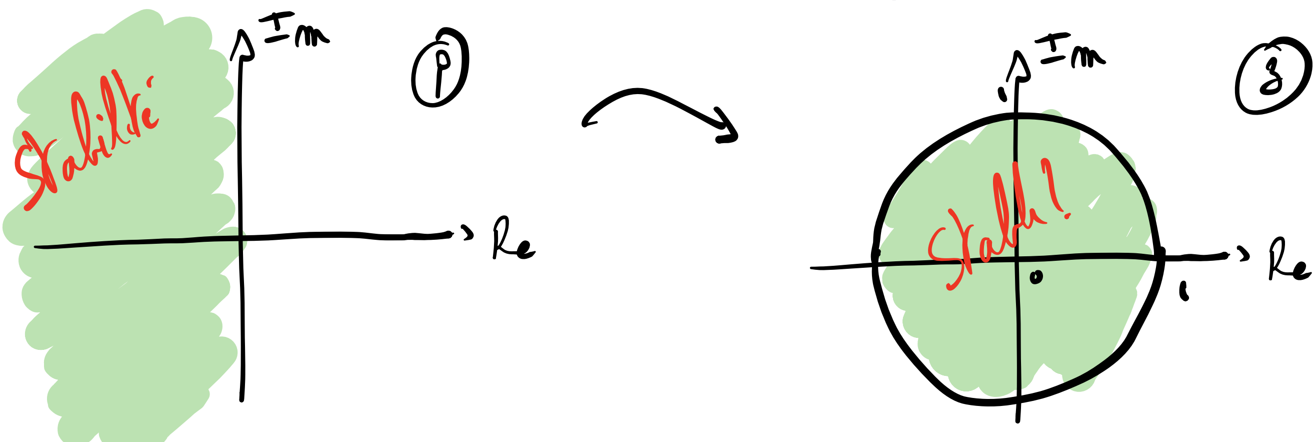
Équivalence à l'intégration (2/3)

On en déduit l'équivalence :

Transformée bilinéaire (ou de Tustin)

$$p \longrightarrow \frac{2}{T_e}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

On peut montrer que pour cette transformation de p vers z on a :



$\rightarrow$ la transformée bilinéaire conserve la stabilité du système analogique

Équivalence à l'intégration (3/3)

Exemple d'utilisation : trouver l'équivalent numérique du filtre analogique de fonction de transfert $H_a(p) = \frac{1}{1+\tau p}$.

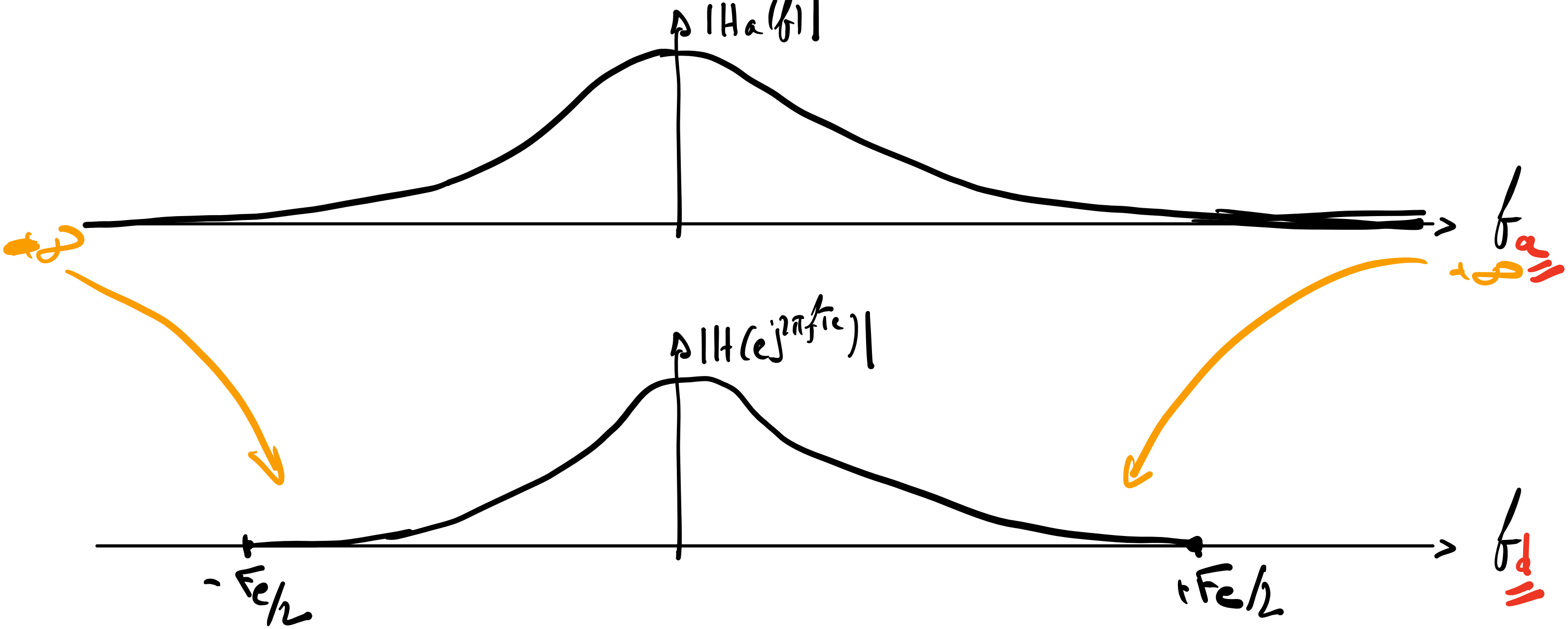
$$H_a(p) = \frac{1}{1+\tau p} \longrightarrow H(z) = \frac{1}{1+\tau \cdot \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{T_e(1+z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})+2\tau(1-z^{-1})}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{T_e(1+z^{-1})}{(T_e+2\tau)+(T_e-2\tau)z^{-1}}}$$

Transformée bilinéaire : le gauchissement (1/3)

Comparons qualitativement les réponses en fréquences des 2 systèmes obtenus :



On constate que :

- les fréquences $-\infty < f_a < +\infty$ se projettent sur $-F_e/2 < f_d < F_e/2$
- cela "compresse" donc l'axe des fréquences (analogiques) . . . et déforme la réponse en fréquence du système analogique

Ce phénomène s'appelle le **gauchissement** (ou **warping**).

Transformée bilinéaire : le gauchissement (2/3)

Formalisons la relation reliant la fréquence analogique f_a à la fréquence numérique f_d :

$p = j2\pi f_a$

$z = e^{j2\pi f_d T_e}$

$$p \longmapsto \frac{2}{T_e}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$j2\pi f_a \longmapsto \frac{2}{T_e}\,\frac{1 - e^{-j2\pi f_d T_e}}{1 + e^{-j2\pi f_d T_e}}$$

$$\cancel{j}\,2\pi f_a \longmapsto \frac{\cancel{2}}{T_e}\,\frac{\cancel{2}j \sin(\pi f_d T_e)}{\cancel{2} \cos(\pi f_d T_e)} \cdot \cancel{\frac{e^{-j\pi f_d T_e}}{e^{-j\pi f_d T_e}}}$$

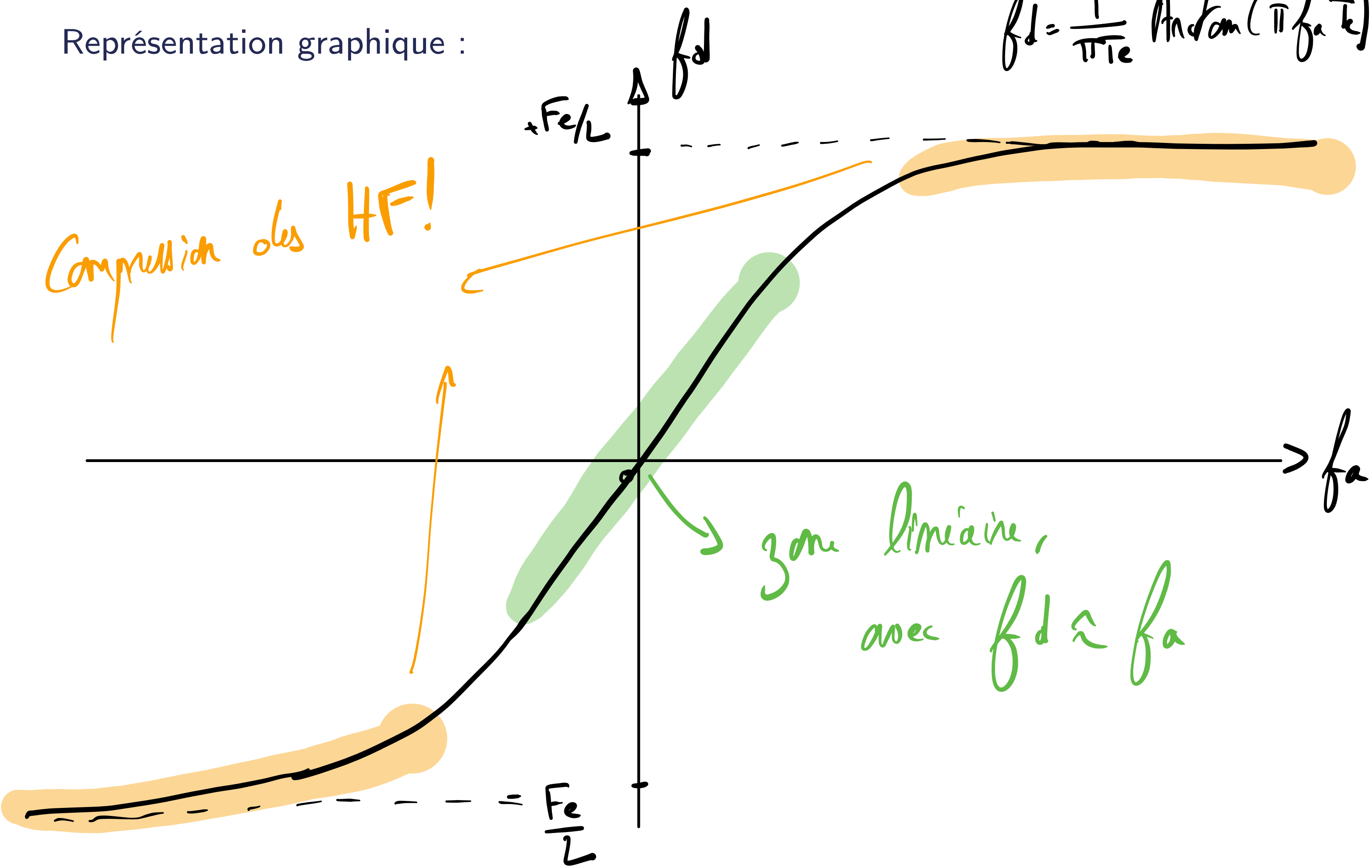
ou encore :

$$\begin{cases} f_a \longmapsto \dfrac{1}{\pi T_e} \tan(\pi f_d T_e) \\[2ex] f_d \longmapsto \dfrac{1}{\pi T_e} \arctan(\pi f_a T_e) \end{cases}$$

Transformée bilinéaire : le gauchissement (2/3)

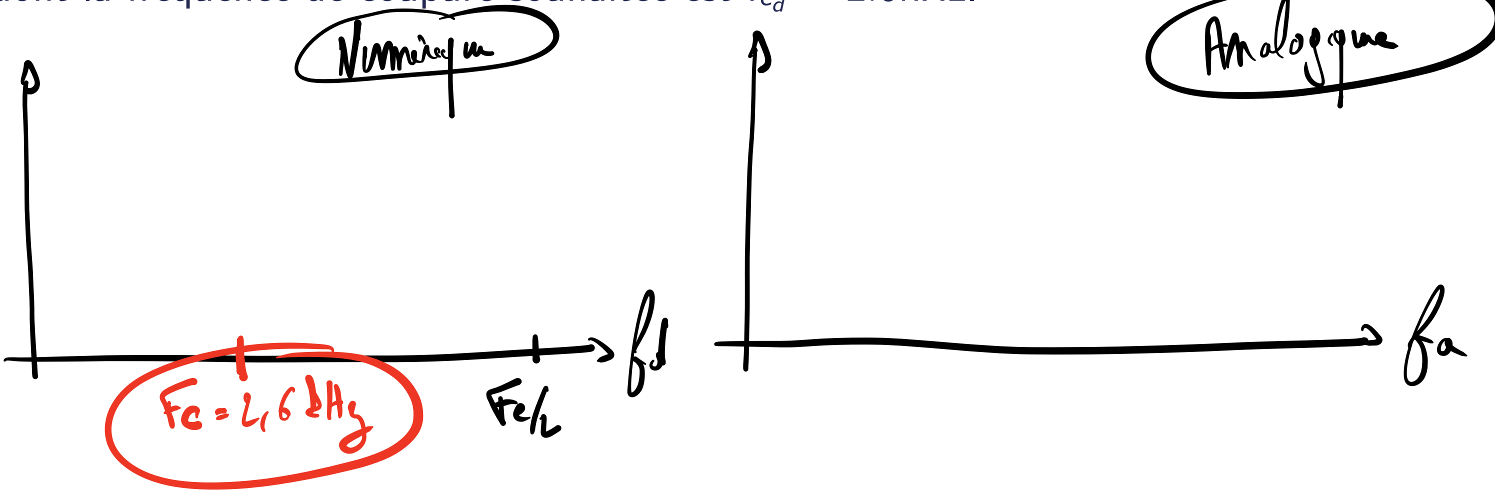
Représentation graphique :

$$f_d = \frac{1}{\pi T_e} \operatorname{Arctan}(\pi f_a T_e)$$



Synthèse par transformée bilinéaire (1/2)

Prenons un exemple pour lequel on souhaite synthétiser un filtre **numérique** dont la fréquence de coupure souhaitée est $f_{c_d} = 2.6\text{kHz}$.



Si $F_e = 8$ kHz :

Alors : $f_{c_a} = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi f_d T_e) = 4155,5$ Hz

$\neq 2,6$ kHz !

Synthèse par transformée bilinéaire (2/2)

Méthodologie :

1. On part du gabarit souhaité pour le filtre **numérique** ;
2. On transforme ce gabarit numérique en gabarit **analogique** selon la relation :
$$f \mapsto \frac{F_e}{\pi} \tan\left(\pi \frac{f}{F_e}\right)$$
3. On synthétise un filtre analogique qui vérifie ce nouveau gabarit **analogique** ;
4. On applique la transformée bilinéaire :
$$p \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$
5. On vérifie que le filtre numérique ainsi obtenu vérifie bien le gabarit **numérique** souhaité (*c'est normalement le cas !*).

Conclusion

A retenir

La synthèse des filtres RII ...

- ...nécessite une attention particulière quant à la stabilité du filtre obtenu ;
- ...s'effectue en général sur la base d'une équivalence de fonctionnement d'un filtre analogique "de départ" ;
- Il existe alors deux grandes approches de synthèse :
  - soit on cherche à reproduire le comportement temporel du système analogique (par équivalence aux réponses temporelles d'intérêt),
  - soit on cherche à en reproduire le comportement fréquentiel (équivalence de p vers z).

Dans tous les cas, on ne reproduit pas strictement le comportement du système analogique !