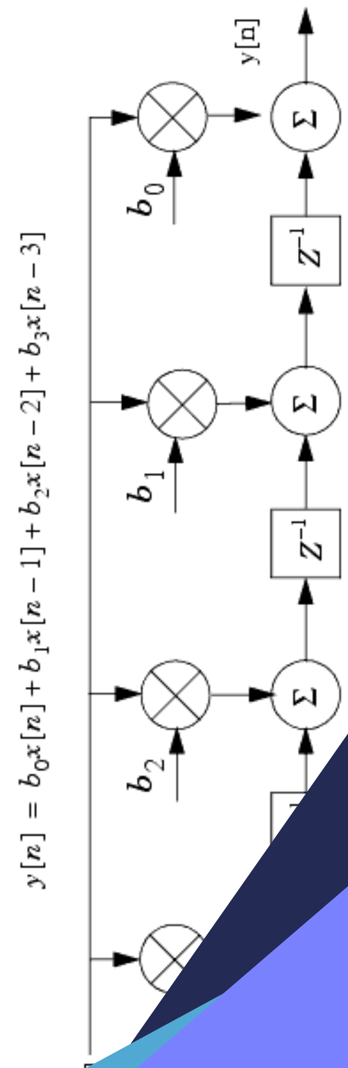
MU4MEN01 : TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Cours 5 : les systèmes discrets

26 octobre 2021

Sylvain Argentieri

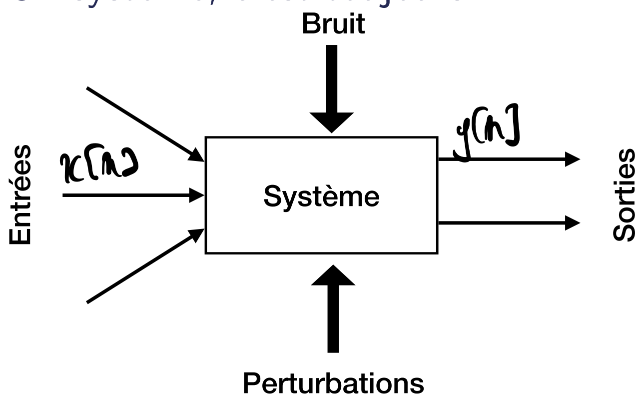


SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Introduction et rappels

Systèmes : rappels

Un système, c'est toujours :



Relation fondamentale entrée/sortie :

$$y[n] = H\left[x[n]\right].$$

Hypothèses :

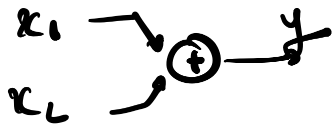
- Linéarité : $H\left[x_1[n] + \alpha x_2[n]\right] = H\left[x_1[n]\right] + \alpha H\left[x_2[n]\right]$
  $= y_1[n] + \alpha y_2[n]$
- Invariance
  $H\left[x[n-n_0]\right] = y[n-n_0]$
- + Stabilité :
  stable si $|x[n]| < A$ alors $y[n] < B$
- + Causalité :
  si $x[n] = 0$ pour $n < n_0$, alors $y[n] = 0 \quad \forall n < n_0$.

Systèmes numériques : éléments de base

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

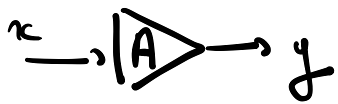
Un filtre numérique, c'est simplement une opération (linéaire, invariante) effectuée sur les échantillons d'entrée pour produire les échantillons de sortie. En pratique, cette opération est **toujours réalisée par 3 opérateurs de base** :

- l'additionneur :



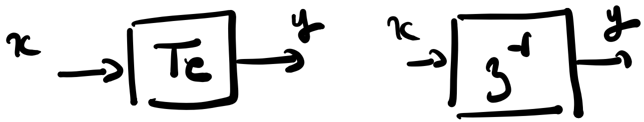
$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

- le multiplicateur par une constante :



$$y[n] = A\,x[n]$$

- la cellule retard (ou mémoire) :



$$y[n] = x[n-1]$$

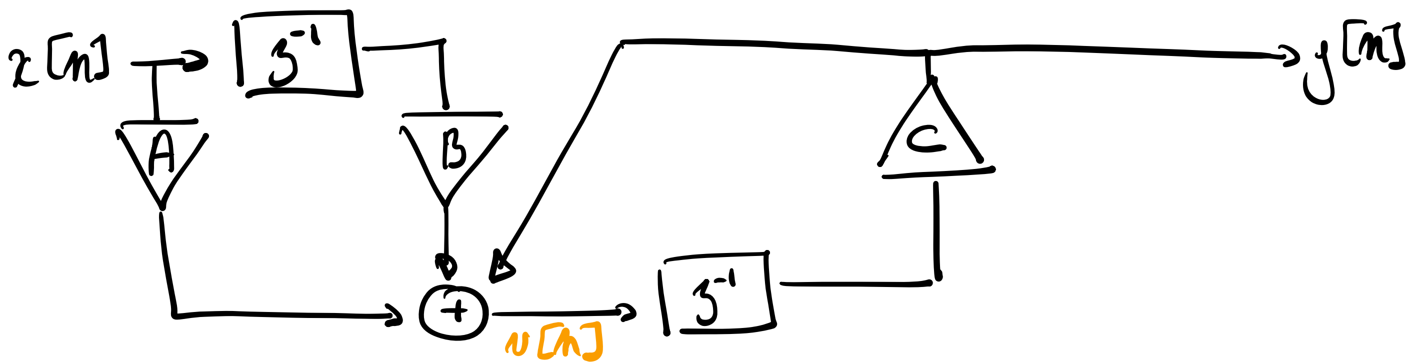
Avec ces 3 éléments, il est possible de réaliser TOUS les systèmes numériques linéaires invariants !

. . . et fabriquer un système discret (un filtre !) consiste juste à trouver de combien d'additionneur, de quels coefficients multiplicateur et de combien de cellules mémoires nous avons besoin.

Caractérisation temporelle des systèmes discrets

Représentation temporelle : équation de récurrence (1/2)

Soit le système numérique suivant, réalisé uniquement à partir des 3 briques de base précédentes :



On peut facilement écrire la relation qui relie la sortie $y[n]$ à l'entrée $x[n]$:

$$\begin{cases} v[n] = A\,x[n] + B\,x[n-1] + y[n] & (1) \\ y[n] = C\,v[n-1] & (2) \end{cases}$$

→ équation de récurrence.

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = AC\,x[n-1] + BC\,x[n-2] + C\,y[n-1]}$$

Représentation temporelle : équation de récurrence (2/2)

Dans le cas général, les systèmes discrets linéaires et invariants vérifient :

Équation de récurrence

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

On distingue alors 2 cas :

- $y[n]$ de dépend que de $x[n-k]$: l'équation de récurrence est alors non récursive ;
- $y[n]$ dépend aussi de $y[n-k]$: l'équation de récurrence est alors récursive, et il est nécessaire de **garder en mémoire les valeurs passées de la sortie** pour utiliser le filtre.

Nous verrons que selon le type de filtre utilisé, leur équation de récurrence est différente . . . et leurs propriétés également !

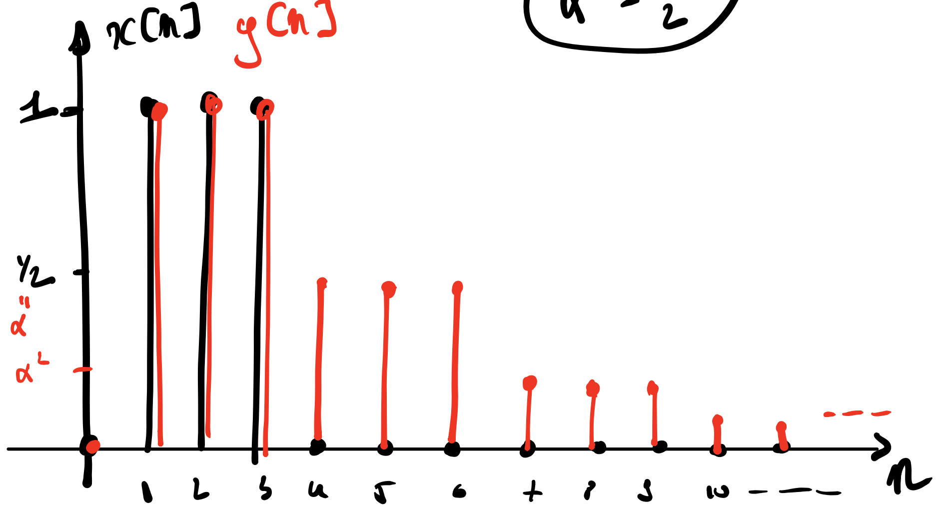
Représentation temporelle : équation de récurrence, exemple

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Soit un système d'équation de récurrence : $y[n] = x[n] + \alpha y[n-3]$.
Déterminer $y[n]$ pour $x[n] = [0, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots]$

$$y[0] = x[0] + \alpha \cancel{y[-3]} = 0$$
$$y[1] = x[1] + \alpha \cancel{y[-2]} = 1$$
$$y[2] = x[2] = 1$$
$$y[3] = x[3] + \alpha y[0] = 1 + \alpha \times 0 = 1$$
$$y[4] = x[4] + \alpha y[1] = \alpha$$
$$y[5] = x[5] + \alpha y[2] = \alpha$$
$$y[6] = \alpha y[3] = \alpha$$
$$y[7] = \alpha y[4] = \alpha^2$$
$$y[8] = \alpha^2$$
$$\vdots$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

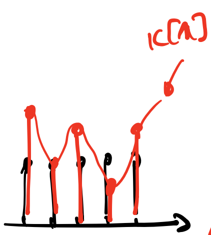


Représentation temporelle : réponse impulsionnelle

Comme pour les systèmes analogiques, un système numérique est totalement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h[n]$, i.e. par la façon dont il répond à une impulsion discrète unité (le Dirac numérique) placé en entrée.

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow h[n]$$

Entrée $x[n]$	Sortie $y[n]$
$\delta[n]$	$h[n]$
$\delta[n-i]$	$h[n-i]$: invariance.
$x[i]\,\delta[n-i]$	$x[i]\,h[n-i]$: linéarité.
$\sum_i x[i]\,\delta[n-i]$	$\sum_i x[i]\,h[n-i]$: linéarité



Représentation temporelle : convolution

On montre donc que l'entrée $x[n]$ et la sortie $y[n]$ sont reliées par un produit convolution discret, défini selon :

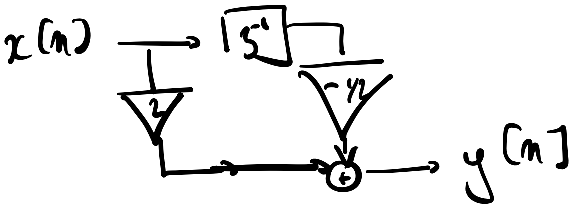
Produit de convolution

$$y[n] = \sum_{i=0}^{+\infty} h[i]x[n-i] = \sum_{i=0}^{+\infty} x[i]h[n-i] = h[n] * x[n] = x[n] * h[n]$$

Les propriétés du produit de convolution discret sont identiques à celles en analogique.

Représentation temporelle : réponse impulsionnelle finie/infinie (1/3)

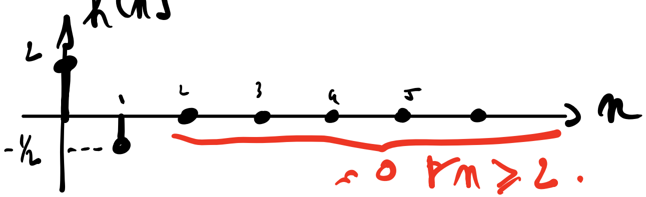
Prenons 2 exemples :



On a : $y[n] = 2x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

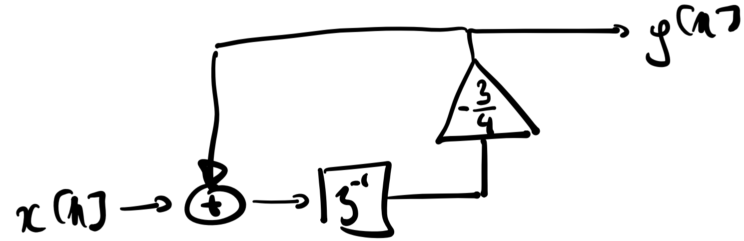
Si $x[n] = \delta[n]$

$\Rightarrow y[n] = h[n] = 2\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$



$= 0 \ \forall n \geq 2.$

↳ Rép. Imp. FINIE (RIF)



On a : $y[n] = -\frac{3}{4}x[n-1] - \frac{3}{4}y[n-1]$

Si $x[n] = \delta[n]$

$\Rightarrow y[n] = h[n]$

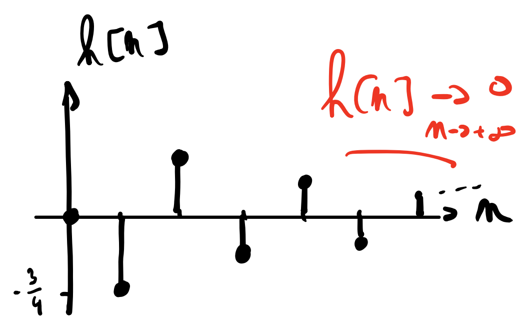
$y[0] = 0$

$y[1] = -\frac{3}{4}$

$y[2] = \left(-\frac{3}{4}\right)^2$

$y[3] = \left(-\frac{3}{4}\right)^3$

⋮



$h[n] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

↳ Rép. Imp. INFINIE (RII)

Représentation temporelle : réponse impulsionnelle finie/infinie (2/3)

On constate donc 2 types de réponses impulsionnelles :

- Les systèmes à **réponse impulsionnelle finie** (RIF), *ou Finite Impulse Response (FIR)* : au bout d'un certain temps, $h[n]$ vaut 0 et reste à 0 ;

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{i=0}^{+\infty} h[i]\, x[n-i] = \sum_{i=0}^{M} h[i]\, x[n-i]$$

$$\text{On } y[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l\, x[n-l] - \sum_{l=1}^{N} \underbrace{a_l}_{=0}\, y[n-l]$$

Pour les filtres RIF, les échantillons de la réponse impulsionnelle sont exactement les coefficients de l'équation de récurrence.

Représentation temporelle : réponse impulsionnelle finie/infinie (3/3)

On constate donc 2 types de réponses impulsionnelles :

- Les systèmes à **réponse impulsionnelle infinie** (RII), *ou Infinite Impule Response (IIR)* : $h[n]$ tend vers 0 mais ne s'annule jamais.

$$\begin{cases} y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{i=0}^{+\infty} h[i]\, x[n-i] \\ y[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l\, x[n-l] - \sum_{l=1}^{N} a_l\, y[n-l] \end{cases}$$

... et c'est tout ...

Caractérisation fréquentielle des systèmes discrets

Représentation fréquentielle : fonction de transfert (1/3)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

On rappelle qu'on a : $y[n] = h[n] * x[n]$. Appliquons une transformée en Z à cette équation. Il vient immédiatement que : $Y(z) = H(z)X(z)$ (cf. propriétés de la TZ).

On on a :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=0}^{N} a_l y[n-l] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \quad (a_0 = 1)$$

$$\Big\downarrow \text{TZ}$$

$$\sum_{l=0}^{N} a_l Y(z) z^{-l} = \sum_{l=0}^{M} b_l X(z) z^{-l}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{\sum_{l=0}^{N} a_l z^{-l}}}$$

$H(z)$: fonction de transfert.

Représentation fréquentielle : fonction de transfert (2/3)

On constate donc que :

Fonction de tranfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

ordre du filtre

$H(z)$ est la transformée en Z de la réponse impulsionnelle du système discret, et est appelé **fonction de transfert**. Celle-ci prend donc la forme, pour les systèmes (discrets) linéaires et invariants, d'une **fraction rationnelle**. Par définition :

- les valeurs de z annulant le numérateur de $H(z)$ sont appelées **les zéros** du système ;
- les valeurs de z annulant le dénominateur de $H(z)$ sont appelées **les pôles** du système.

Représentation fréquentielle : fonction de transfert (3/3)

- Pour les systèmes de type RIF, on rappelle qu'on a :

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

La fonction de transfert prend donc la forme "simplifiée" suivante :

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{M-l}}{z^M}$$

On constate donc que pour les systèmes RIF, l'ensemble des pôles sont égaux à 0 !

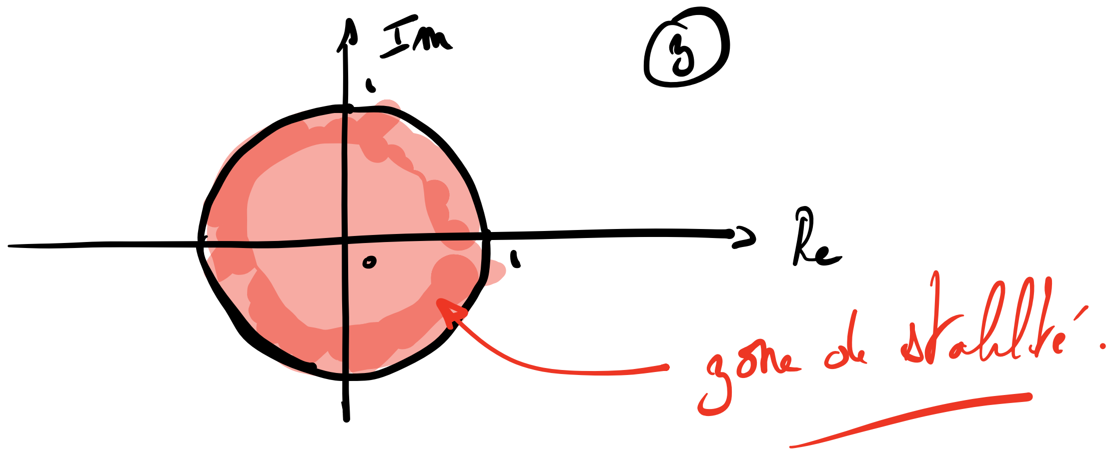
- Pour les systèmes de type RII . . . pas de simplification dans le cas général.

Attention ! La forme de la fonction de transfert ne permet pas à coup sûr de déterminer la nature RIF ou RII du système !

Condition de stabilité

Pour les systèmes discrets linéaires et invariants, on peut montrer qu'un système est **stable** (au sens entrée bornées, sortie bornée) si et seulement si ses **pôles** p_i sont "**à l'intérieur du cercle unité**" dans le plan complexe, i.e.

$$|p_i| < 1, \forall i \in [1, N].$$



Stabilité des systèmes RIF

On en déduit immédiatement que les **systèmes RIF**, dont les pôles sont tous en 0, sont **toujours stables**.

Représentation fréquentielle : réponse en fréquence (1/3)

Nous avons vu à l'occasion de l'étude de la transformée en Z le lien entre celle-ci et la TFSD. On en déduit alors directement que $H(e^{j2\pi f T_e})$, la TFSD de la réponse impulsionnelle, s'écrit :

Réponse en fréquence

$$H(e^{j2\pi f T_e}) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi f T_e}}.$$

$H(e^{j2\pi f T_e})$ est appelé la **réponse en fréquence** du système.

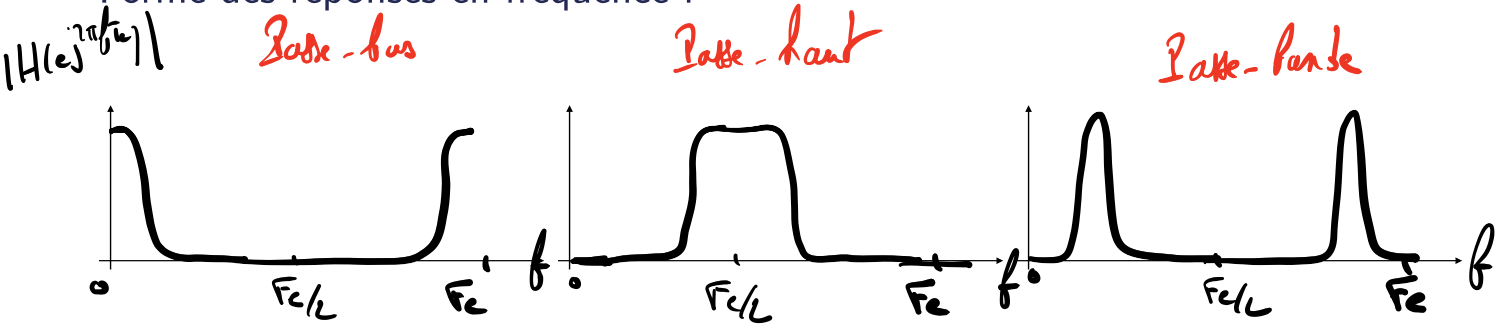
On rappelle aussi que $Y(e^{j2\pi f T_e}) = H(e^{j2\pi f T_e})X(e^{j2\pi f T_e})$. Ainsi :

- $|H(e^{j2\pi f T_e})|$ représente donc les fréquences qui seront amplifiées ou atténuées en amplitude par le filtre,
- $\angle H(e^{j2\pi f T_e})$ caractérise la phase apportée par le filtre pour chacune des fréquences.

$\rightarrow$ Un système (linéaire, invariant) peut donc être considéré comme **un filtre**.

Représentation fréquentielle : réponse en fréquence (2/3)

Forme des réponses en fréquence :



Exemple de calcul : soit le filtre d'équation de récurrence :

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n-1] + x[n] + x[n+1]\right)$$

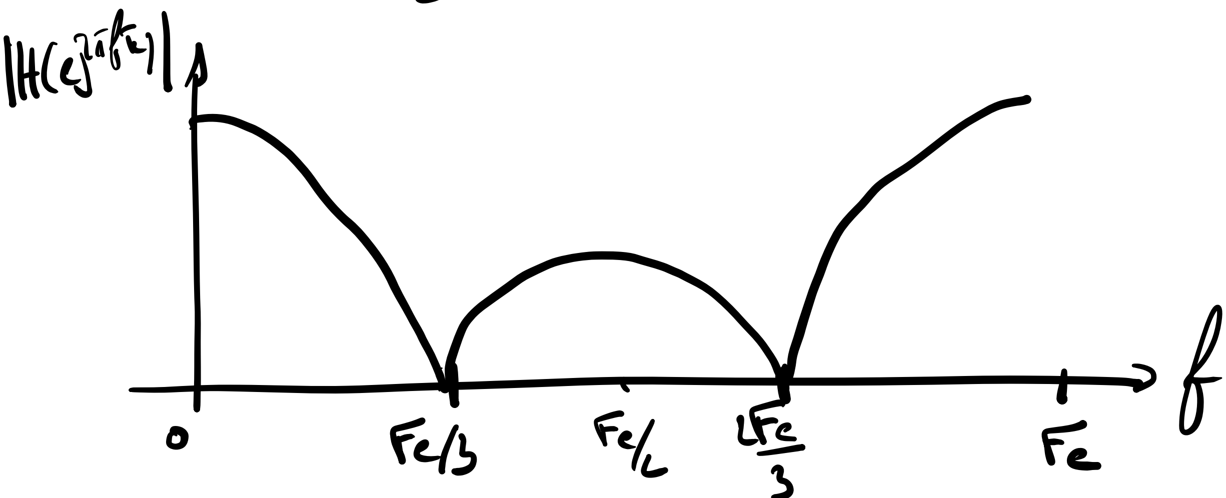
$$\Big\downarrow \text{TZ}$$

$$Y(z) = \frac{1}{3}\left(z^{-1}X(z) + X(z) + z \cdot X(z)\right) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3}\left(z^{-1} + 1 + z\right)$$

Donc $H(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{1}{3}\left(e^{-j2\pi f T_e} + 1 + e^{+j2\pi f T_e}\right)$

Représentation fréquentielle : réponse en fréquence (3/3)

$$H(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos(2\pi f T_e)\right)$$



↳ filtre **PASSE-BAS**

Propriétés de la réponse en fréquence

- $H(e^{j2\pi f T_e})$ est périodique, de période F_e ...comme toutes les grandeurs en fréquence dans le monde numérique ;
- On définit le gain statique du filtre $G_s = H(e^{j2\pi f T_e})|_{f=0} = H(z)|_{z=1}$;
- Dans le cas où $H(e^{j2\pi f T_e}) = |H(e^{j2\pi f T_e})|e^{j\varphi(f)}$, on introduit le **temps de propagation de groupe** $\tau(f)$:

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi(f)}{\mathrm{d}f}.$$

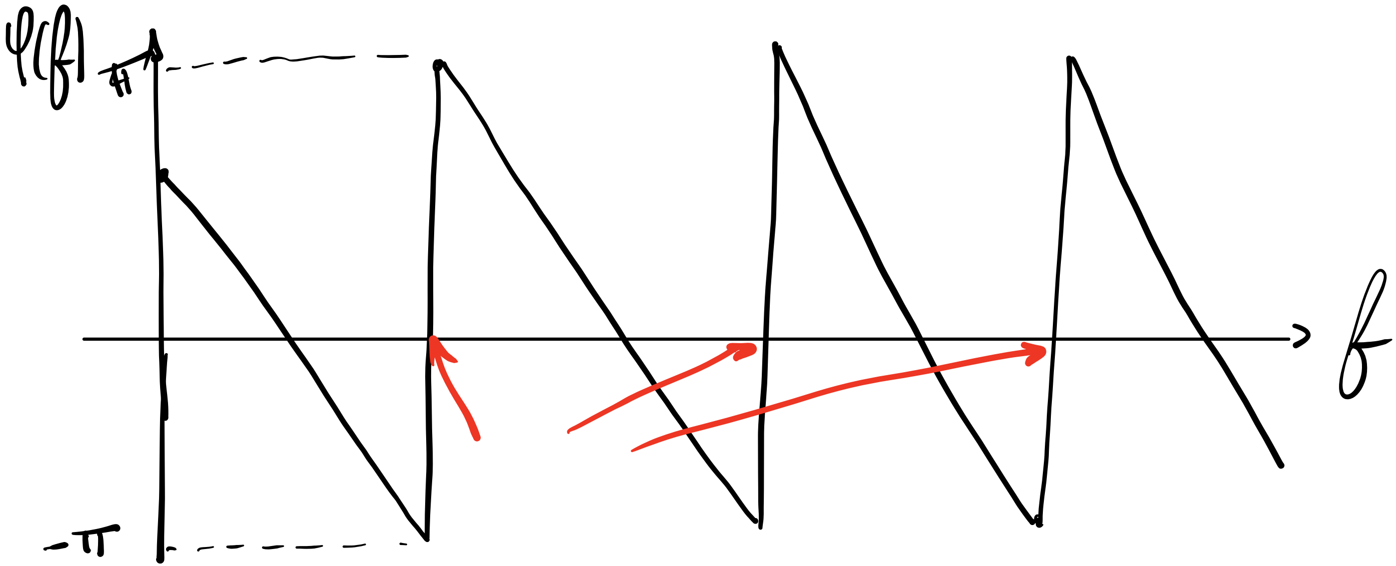
$\tau(f)$ caractérise "le retard subis par une fréquence f" au passage du filtre. Ainsi, si $\tau(f)$ est constant (le filtre introduit donc un retard pur τ !), alors :

$$\tau(f) = \tau = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi(f)}{\mathrm{d}f}$$
$$\leftrightarrow \varphi(f) = -2\pi\tau_r f + cte$$

La phase de la réponse en fréquence varie alors linéairement selon f !

Propriété de phase linéaire

Représentation graphique :



On peut montrer que seuls les filtres RIF peuvent avoir une phase linéaire. Si son ordre est égal à M, alors :

- si M est pair ($M = 2P$), alors $\tau = PT_e$;
- si M est impair ($M = 2P + 1$), alors $\tau = (P + 1/2)T_e$.

Tracé de la réponse en fréquence selon la position des pôles et zéros (1/2)

Il est possible d'obtenir l'allure de la réponse en fréquence d'un filtre numérique sans aucun calcul, à partir de la position des **pôles** et **zéros** du filtre dans le plan complexe. En effet, toutes les fonctions de transfert des systèmes DLI s'écrivent

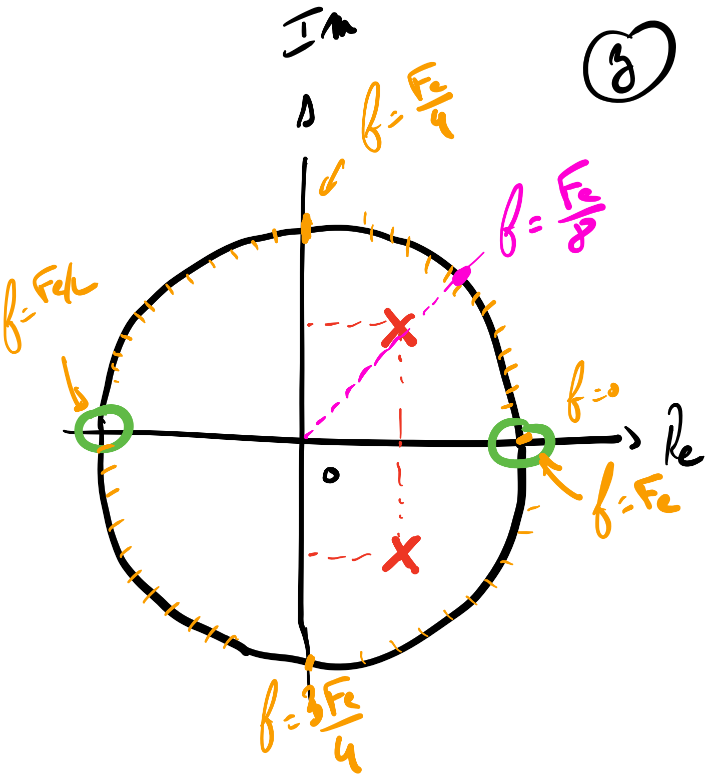
$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_m)}.$$

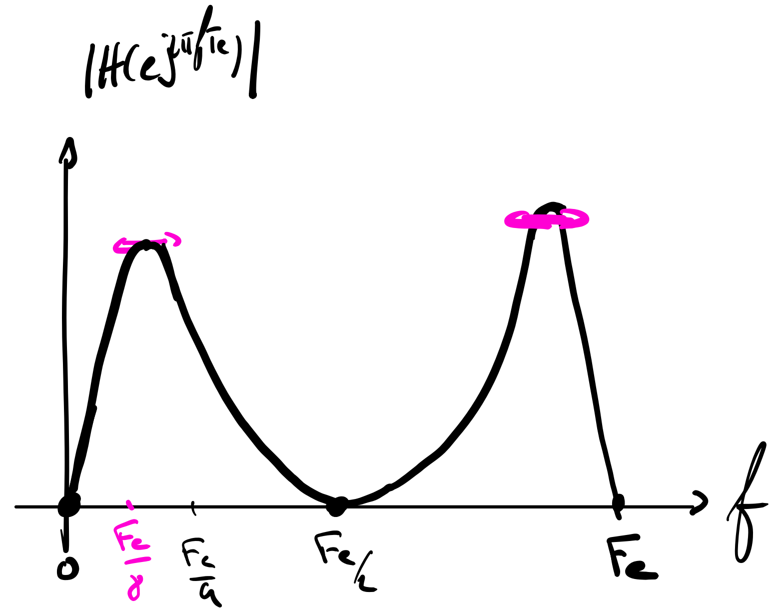
Alors, pour des z de module 1 (cercle unité),$|(z - z_k)|$ s'apparente à la mesure de la distance séparant le point z_k dans le plan complexe de z sur le cercle unité. 2 cas se présentent alors :

- $|(z - z_k)|$ est petit (z proche de z_k) :
  - si z_k est un pôle, alors $|H(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}}| = |H(e^{j2\pi fT_e})|$ est grand ;
  - si z_k est un zéro, alors $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ est petit ;
- $|(z - z_k)|$ est grand (z loin de z_k) :
  - si z_k est un pôle, alors $|H(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}}| = |H(e^{j2\pi fT_e})|$ est petit ;
  - si z_k est un zéro, alors $|H(e^{j2\pi fT_e})|$ est grand ;

Tracé de la réponse en fréquence selon la position des pôles et zéros (2/2)

Exemple : $H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-p_1)(z-p_2)}$, avec $p_1 = 0.5 + 0.5j$ et $p_2 = p_1^*$.





⇒ filtre passe-bande, centré en $f = Fe/8$

Exemple d'étude d'un filtre

Exemple : le filtre moyenneur (1/3)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[n-i] \longrightarrow \text{filtre RIF !}$$

$\downarrow$ TZ

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

forme récursive du filtre RIF !

$$H(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{1}{N} \frac{1-e^{-j2\pi f N T_e}}{1-e^{-j2\pi f T_e}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N T_e)}{\sin(\pi f T_e)} e^{-j\pi f (N-1) T_e}$$

Exemple : le filtre moyenneur (2/3)

- Module

- Phase :

$$\varphi(f) = -\pi f (N-1) T_e \Rightarrow \tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df} = \frac{N-1}{2} \cdot T_e = \text{cte}$$

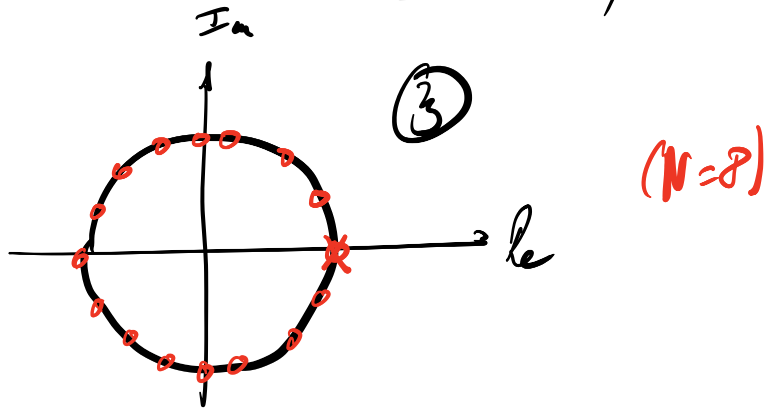
↳ phase linéaire ⇒ ↳ retard cte

Exemple : le filtre moyenneur (3/3)

Pôles : Pas en 0 !

Zéros : $1-z^{-N}=0 \Leftrightarrow z^{N}=1 \longrightarrow$ racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

$\hookrightarrow e^{j\ell\frac{2\pi}{N}}, \ \ell=0 \dots N-1$



Conclusion

A retenir

Les systèmes discrets . . .

- . . . sont caractérisés en temps par leur équation de récurrence (récursive ou non) et leur réponse impulsionnelle ;
- . . . sont caractérisés en fréquence par leur fonction de transfert et leur réponse en fréquence ;
- Il existe deux grandes familles de systèmes :
  - les systèmes à réponse impulsionnelle finie (RIF),
  - et les systèmes à réponde impulsionnelle infinie (RII),

dont les propriétés diffèrent.

Bilan

- Propriétés RIF/RII :

	RIF	RII
Rép. impulsionnelle	Durée finie	Durée infinie (mais converge vers 0)
Equ. de récurrence	Non récursive ou récursive	Forcément [redacted] **récursive**
Rép. en fréquence	Phase possiblement **linéaire**	Phase non linéaire
Stabilité	**Toujours** stable	Peut être **instable**

- Lien entre les caractéristiques temporelles/fréquentielle :

$h[n] \xrightarrow{TFSD} H(e^{j2\pi f_c})$

$x(n) = \delta(n)$

$z = e^{j2\pi f_c}$

TZ

$H(z)$

Eq n'immu

TZ