MU4MEN01 : TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Cours 4 : outils mathématiques
La transformée en Z

26 octobre 2021

Sylvain Argentieri

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Suites	Transformée en z
$u_0 = 1$, $u_n = 0$ si $n > 0$	1
$u_k = 1$, $u_n = 0$ si $n \neq k$	z^{-k}
1	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - z\cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega)}$
$\sin(\omega n)$	$\frac{z\,\mathrm{s}}{z^2 -}$
$a^n\cos(\omega n)$	

Définitions

Introduction

Pour les systèmes continus, linéaire et invariants, nous avions introduit la transformée de Laplace :

$$X(p) = \int x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Elle présentait plusieurs avantages :

- introduction de la notion de fréquence complexe : la variable de Laplace p (ou s en notation anglo saxonne) ;
- généralisation de la définition de la transformée de Fourier ... qui n'existe pas pour tous les signaux (exemple : l'échelon) ;
- permet d'introduire les notions de pôles et de zéros (caractérise les propriétés du système, en particulier sa stabilité) ;
- ... et pleins d'autres propriétés !

Existe-t'il l'équivalent dans le monde du numérique ?
$\rightarrow$ Oui, c'est la **transformée en Z**.

Définition

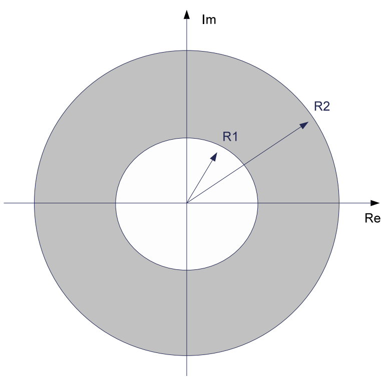
On appelle transformée en Z du signal discret $x[n]$ la grandeur notée $X(z)$ définie par :

Transformée en Z (TZ)

$$\mathrm{TZ}\left[x[n]\right] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

où $z \in \mathbb{C}$ est appelée *fréquence complexe*, et $R_1 < |z| < R_2$. On constate donc que $X(z)$:

- est une grandeur *continue* en z ;
- est défini sous la forme d'une série . . . dont il faudra s'assurer de la convergence . . .
- converge si z appartient à une *couronne de convergence*.



Exemples (1/2)

- Impulsion $\delta[n]$:

$$TZ[\delta[n]] = \sum_n \delta[n] z^{-n} = z^{-0} = 1$$

- Impulsion décalée $\delta[n-n_0]$:

$$TZ[\delta[n-n_0]] = \sum_n \delta[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0}$$

- Echelon $u[n]$:

$$TZ[u[n]] = \sum_n u[n] z^{-n} = \sum_{n\geq 0} z^{-n} = \sum_{n \geq 0} (z^{-1})^n$$

$$\rightarrow \boxed{TZ[u[n]] = \frac{1}{1-z^{-1}}} \rightsquigarrow \text{convergence ?}$$

Exemples (2/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

- Fonction $x[n] = a^n u[n]$:

$$TZ[a^n u[n]] = \sum_n a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n\geq 0} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n\geq 0} (a z^{-1})^n = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

MAIS : si $z = 2a$: $X(2a) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{a}{2a}\right)^n = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$

↳ CV !

si $z = \frac{a}{2}$: $X\left(\frac{a}{2}\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{a \times 2}{a}\right)^n = \sum_{n\geq 0} 2^n \rightarrow +\infty$

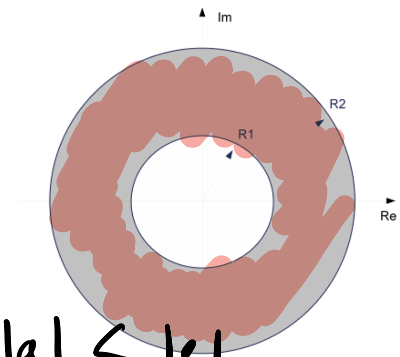
↳ DV !

Convergence

En pratique, on peut montrer que $X(z)$ converge si z se trouve dans une couronne de convergence définie par ses rayons R_1 et R_2, tels que :

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left\{ |x[n]|^{1/n} \right\}$$

$$R_2 = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |x[-n]|^{1/n}}$$



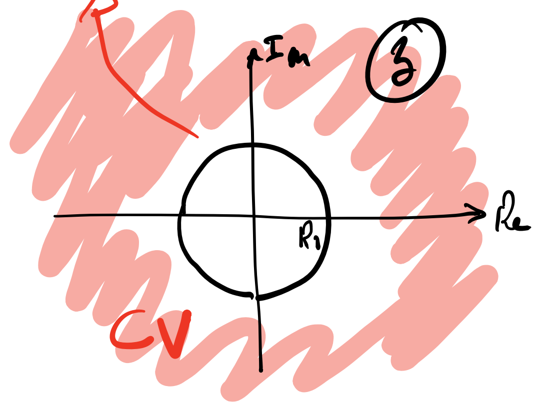
Appliqué à $x[n] = a^n u[n]$, cela donne :

$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ si $|az^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |a| < |z|$

En effet :

$R_1 = \lim_{n \to +\infty} |a^n|^{1/n} = |a|$

$R_2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{0} \to +\infty$



Propriétés

Propriétés (1/2)

- Linéarité :

$$TZ[x[n] + \alpha y[n]] = X(z) + \alpha Y(z)$$

- Retard :

$$TZ[x[n-n_0]] = \sum_n x[n-n_0] z^{-n} = \sum_k x[k] z^{-(k+n_0)}$$

$$k = n - n_0$$

$$= z^{-n_0} \underbrace{\sum_k x[k] z^{-k}} \Rightarrow TZ[x[n-n_0]] = z^{-n_0} X(z)$$

- Changement d'échelle :

$$TZ[a^n x[n]] = \sum_n a^n x[n] z^{-n} = \sum_n x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

$$= X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Propriétés (2/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

- Dérivation :

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\sum_n x[n] z^{-n}\right] = \sum_n -x[n]\, n\, z^{-n-1}$$

$$= -z^{-1} \underbrace{\sum_n n\, x[n] z^{-n}}_{TZ[n\, x[n]]}$$

$$\Rightarrow TZ[n\, x[n]] = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{n \to 0} x[n] = x[0] = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$

- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n \to +\infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z)$$

Convolution

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

On rappelle que la convolution entre 2 signaux s'écrit :

$$c[n] = x[n] * y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]y[n-i]$$

Alors, $C(z) = \mathrm{TZ}[c[n]]$ est donné par :

$$C(z) = \sum_n \left(\sum_i x[i]y[n-i] \right) z^{-n}$$

$$= \sum_i x[i] \underbrace{\sum_n y[n-i] z^{-n}}$$

$$= \underbrace{\sum_i x[i] z^{-i}} \mathrm{TZ}[y[n]]$$

$$= \mathrm{TZ}[x[n]] \times \mathrm{TZ}[y[n]]$$

$$= X(z) \times Y(z)$$

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{\mathrm{TZ}} X(z) \times Y(z)$$

Transformée inverse

Définition

La transformée en Z inverse est formellement définie selon :

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z.$$

où $\mathcal{C}$ est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement à la couronne de convergence de $X(z)$.

En pratique, cette définition n'est guère exploitable, et on évite son calcul par des "moyens détournés"

TZ inverse : division polynomiale (1/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Si $X(z)$ est une fraction rationnelle : $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, alors on peut poser la division polynomiale et espérer identifier une forme connue.

Exemple : $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1 - az^{-1} \\
\hline
-\ (1 - az^{-1}) & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots \\
\quad az^{-1} & \\
\quad -\ (az^{-1} - a^2z^{-2}) & \\
\qquad a^2z^{-2} & \\
\qquad -\ (a^2z^{-2} - a^3z^{-3}) & \\
\qquad\quad a^3z^{-3} \cdots &
\end{array}
$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots$$

$$= \sum_{n \geq 0} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n} \underbrace{a^n u[n]}_{x[n]} z^{-n}$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = a^n u[n]}$$

TZ inverse : division polynomiale (2/2)

Mais ce principe peut s'appliquer à des rapports de polynômes quelconques car $X(z) = Q(z) + R(z)$ avec le quotient $Q(z) = \sum_{n=0}^{N-1} q[n]z^{-n}$.
Si N est suffisamment grand, alors $R(z) \to 0$, et $X(z) \approx Q(z)$, de sorte que $x[n] = TZI[X(z)] \approx q[n]$.

Exemple : $X(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & z^2 & z^2 - 3z + 2 \\
- & z^2 - 3z + 2 & \hline \\
 & 3z - 2 & \underbrace{1 + 3z^{-1} + 7z^{-2} + 15z^{-3} + \dots} \\
- & 3z - 9 + 6z^{-1} & \\
 & 7 - 6z^{-1} & \\
- & 7 - 21z^{-1} + 14z^{-2} & \\
 & 15z^{-1} - 14z^{-2} & \\
 & \dots &
\end{array}
$$

$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$

$\Rightarrow x[0] = 1$

$x[1] = 3$

$x[2] = 7$

$x[3] = 15$

$\vdots$

Décomposition en éléments simples (1/2)

Soit $X(z)$ une fraction rationnelle, telle que :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{z - p_i}$$

Alors, on trouve $x[n]$ par la transformée en Z inverse des éléments $\dfrac{a_i}{z - p_i}$.

TZI d'un élément simple (ordre 1)

$$\text{TZI}\left[\frac{a_i}{z - p_i}\right] = a_i p_i^{n-1} u[n-1]$$

Décomposition en éléments simples (2/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Exemple : $X(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$

$$\text{TZI}\left[\frac{a_i}{z - p_i}\right] = a_i p_i^{n-1} u[n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2}$$

et $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

$$= \underbrace{\frac{1}{z-2}}_{①} - \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{②}$$

$$\Rightarrow \text{TZI}[X(z)] = 1 \times 2^{n-1} u[n-1] - 1 \times 1^{n-1} u[n-1]$$

$$= 2^{n-1} u[n-1] - u[n-1]$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{TZI}[X(z)] = x[n] = (2^{n-1} - 1)\, u[n-1]}$$

Identification avec une table des transformées

Suites	Transformée en z	Domaine de convergence
$u_0 = 1$ $u_n = 0$ si $n > 0$	1	$\mathbb{C}$
$u_k = 1$ $u_n = 0$ si $n \neq k$	z^{-k}	$\mathbb{C}^*$
1	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > a$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > a$
$\cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - z\cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega n)$	$\frac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\|z\| > 1$
$a^n\cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - az\cos(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2}$	$\|z\| > a$
$a^n\sin(\omega n)$	$\frac{az\sin(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2}$	$\|z\| > a$

Extrait de `https://www.bibmath.net/formulaire/index.php?action=affiche&quoi=transformeez`

Lien avec les autres transformées

Relation entre la TFSD et la TZ (1/2)

Si on compare les 2 définitions :

$$X(e^{j2\pi fT_e}) = \sum_n x[n]e^{-j2\pi fT_e n}$$

$$X(z) = \sum_n x[n]z^{-n}$$

Il vient assez naturellement que :

Lien TFSD/TZ

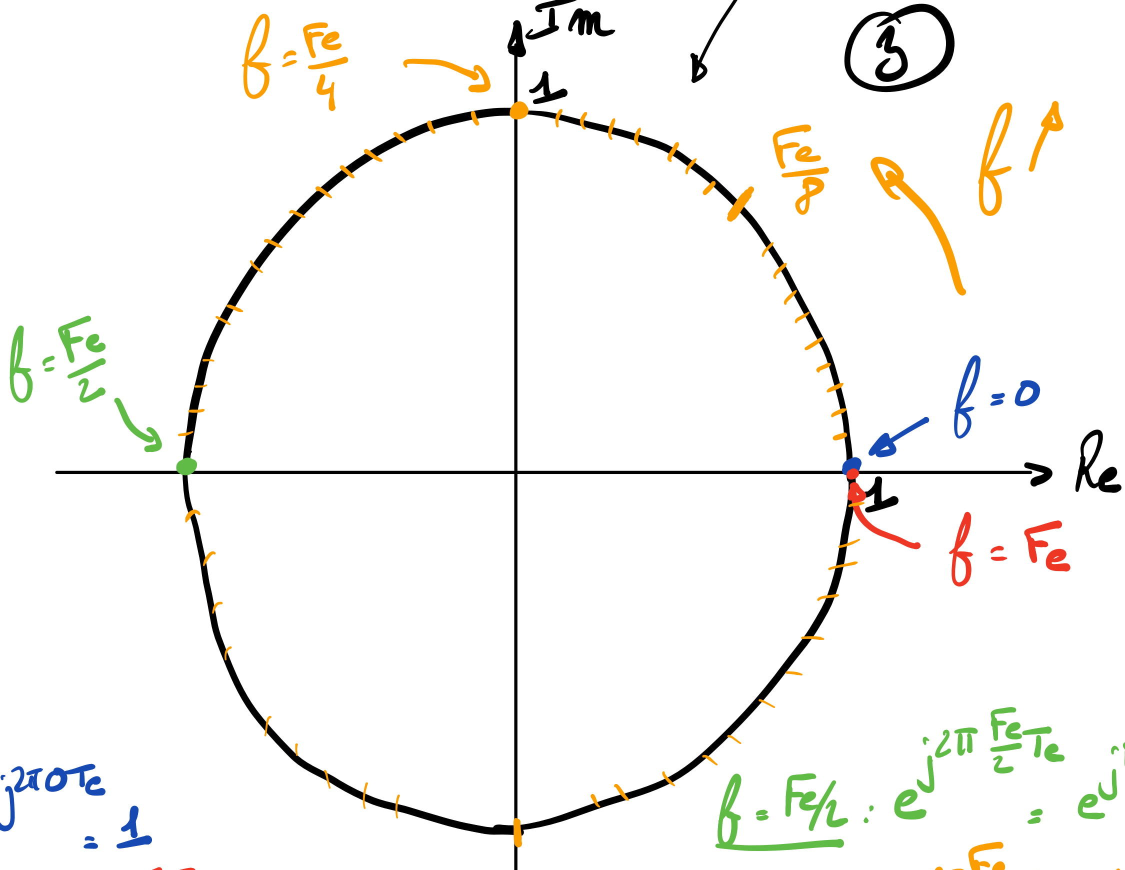
$$X(e^{j2\pi fT_e}) = X(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}}$$

- On constate donc que parmi l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$, on retrouve les fréquences "en Hz" en ne s'intéressant qu'aux z de module 1.
- Cette équivalence justifie également la notation "$e^{j2\pi fT_e}$" pour la TFSD !

Relation entre la TFSD et la TZ (2/2)

Interprétation : relation $z \rightarrow e^{j2\pi f T_e}$

$z = e^{j2\pi f T_e}$



Si $f = 0$: $e^{j2\pi 0 T_e} = 1$

Si $f = F_e$: $e^{j2\pi F_e T_e} = 1$

$f = F_e/2$: $e^{j2\pi \frac{F_e}{2} T_e} = e^{j\pi} = -1$

$f = \frac{F_e}{4}$: $e^{j2\pi \frac{F_e}{4} T_e} = e^{j\frac{\pi}{2}} = +j$

Relation entre la TL et la TZ (1/2)

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

On rappelle que $X(p) = \int x(t)e^{-pt}dt$. Si on calcule la transformée de Laplace du signal échantillonné $x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)$, on a alors :

$$X_e(p) = \int \sum_n x(nT_e)\,\delta(t-nT_e)\,e^{-pt}\,dt = \sum_n x(nT_e)\int \delta(t-nT_e)\,e^{-pt}\,dt$$

$$= \sum_n x(nT_e)\,e^{-pnT_e}$$

$$= \sum_n x[n]\left(e^{pT_e}\right)^{-n}$$

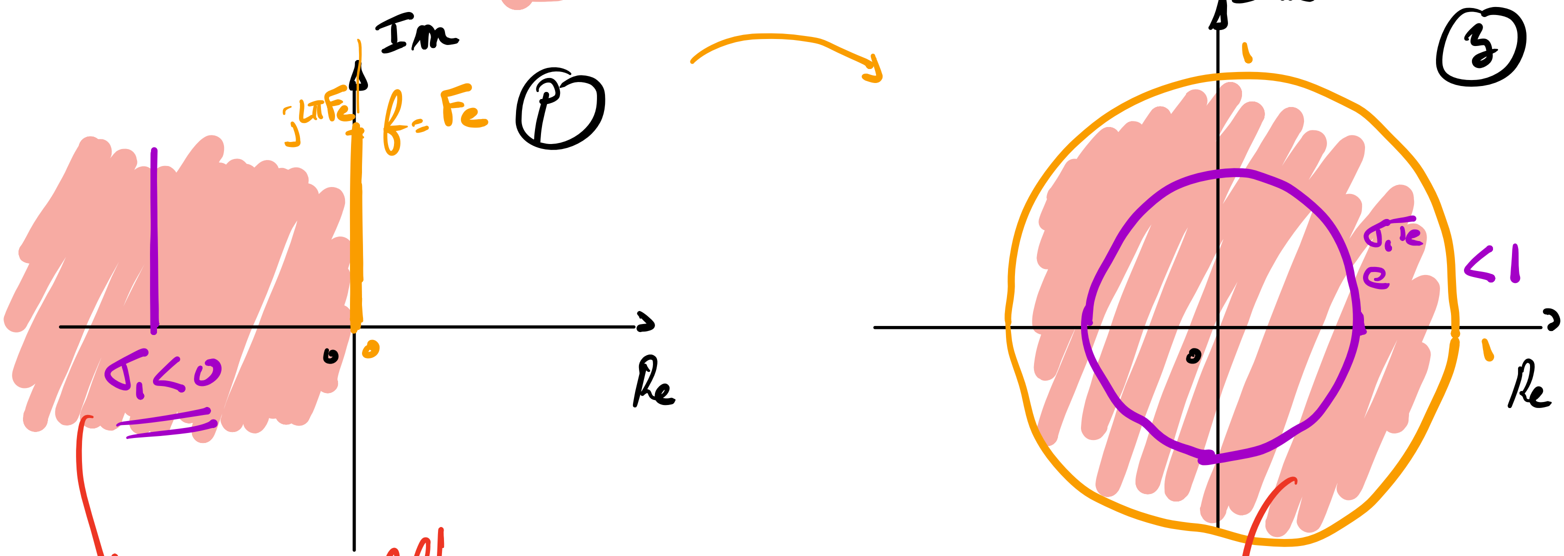
Lien TL/TZ

$$X_e(p) = X_e(z)|_{z=e^{pT_e}}$$

Si on se souvient qu'on pose souvent $p = \sigma + j2\pi f$, on a alors l'analogie : $p \rightarrow e^{\sigma T_e} \times e^{j2\pi f T_e}$.

Relation entre la TL et la TZ (2/2)

Interprétation : relation $p \to e^{\sigma T_e} \times e^{j2\pi f T_e}$



domaine de stabilité pour l'analogique

domaine de stabilité pour le numérique !

Conclusion

Transformée en Z : à retenir

- Définition : $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$;
- Propriétés : retard !
- Calcul des transformées inverses pas simple ... mais on y arrive par des moyens détournés, principalement pas décomposition en éléments simples et table des transformées ;
- La TFSD est un cas particulier de la TZ pour z sur le **cercle unité**. Celui-ci peut alors être gradué en fréquences.