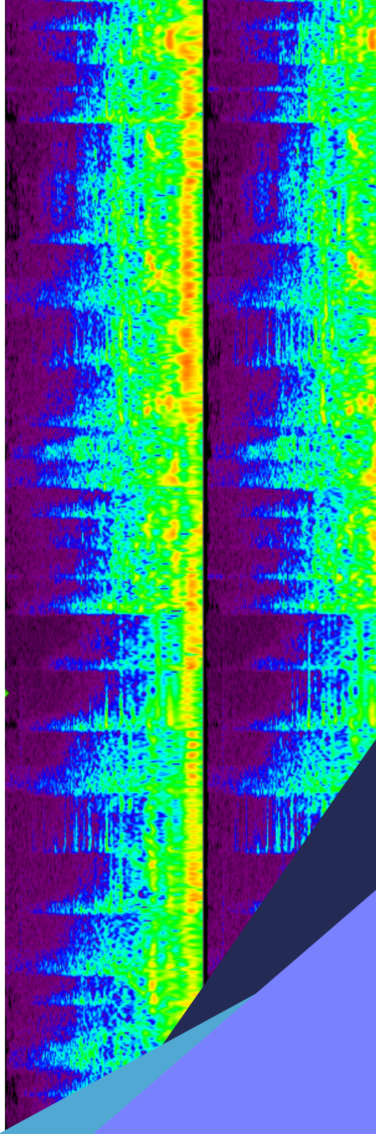
MU4MEN01 : TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Cours 3 : analyse en fréquence des signaux numériques

28 septembre 2021

Sylvain Argentieri

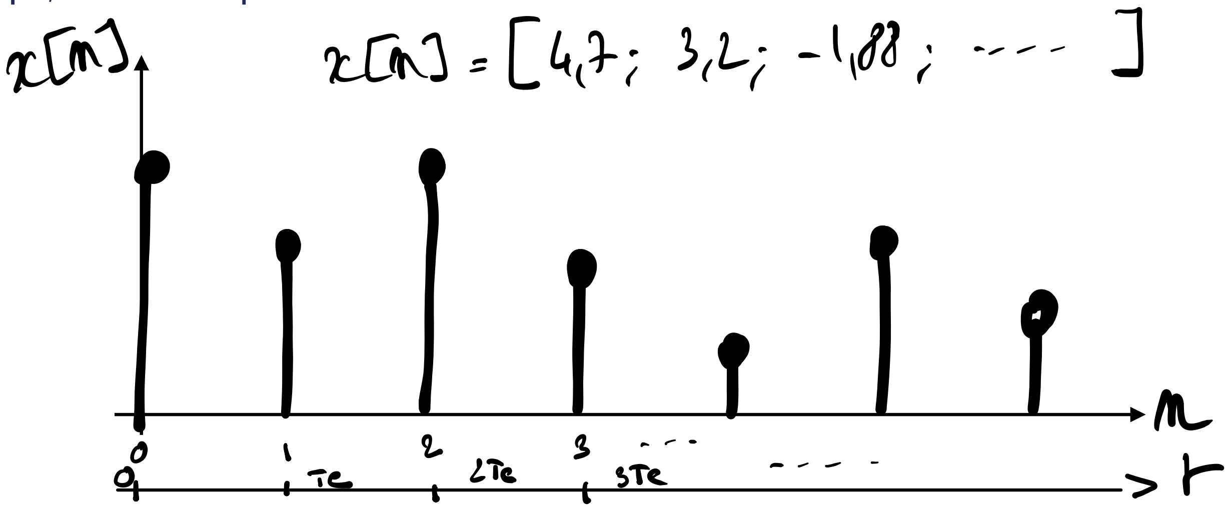
SCIENCES
SORBONNE
UNIVERSITÉ



Transformée de Fourier des signaux discrets

Introduction

Nous sommes donc maintenant en présence de signaux numériques, discrets en temps, dont la représentation est la suivante :



- Les signaux numériques ne sont définis qu'à des instants multiples de T_e ;
- En pratique, un signal numérique n'est donc qu'une **liste de valeurs**, i.e. un **vecteur** collectant les valeurs des échantillons du signal ;
- Ces signaux possèdent néanmoins aussi un contenu fréquentiel, qu'on devine périodique de période de F_e (à cause de l'échantillonnage) ;
- La définition de la transformée de Fourier (des signaux continus) n'est plus applicable, il va falloir l'adapter.

Vers la transformée de Fourier des signaux discrets (1/2)

La TFSC était définie selon : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt.$
Plusieurs soucis "pratiques" se posent quand on cherche à utiliser cette équation pour un signal discret :

- le signal est intégré sur la variable t continue, qui est maintenant discrète :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \rightsquigarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}$$

- on ne s'intéresse plus aux valeurs du signal pour tout t, mais seulement aux instants multiples de T_e :

$$t \longrightarrow nT_e \longrightarrow n \quad \Rightarrow \quad x(t) \rightsquigarrow x_e(nT_e) \to x[n]$$

On aboutit, en adaptant la formule, à une nouvelle transformation de Fourier : c'est la Transformée de Fourier des Signaux Discrets (TFSD)

TFSD

$$X(e^{j2\pi fT_e}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi nfT_e}$$

Vers la transformée de Fourier des signaux discrets (2/2)

Pourquoi cette notation $X(e^{j2\pi f T_e})$? $\rightarrow$ période F_e du motif fréquentiel :

Soit $g(f) = e^{j2\pi f T_e}$

$$g(f+F_e) = e^{j2\pi(f+F_e)T_e n}$$

$$= e^{j2\pi f T_e n + j2\pi n \underbrace{F_e T_e}_{=1}}$$

$$= e^{j2\pi f n T_e} \cdot \underbrace{e^{jn2\pi}}_{=1}$$

$$= e^{j2\pi n f T_e} = g(f)$$

$X(e^{j2\pi f T_e})$ est périodique, de période F_e

Propriétés (1/2)

- Linéarité :

$$TFSD[x_1[n] + \lambda x_2[n]] = X_1(e^{j2\pi f T_e}) + \lambda X_2(e^{j2\pi f T_e}).$$

- Translation dans le temps :

$$TFSD[x[n-n_0]] = X(e^{j2\pi f T_e})\, e^{-j2\pi f n_0 T_e}$$

- Symétrie hermitienne :

$$X(e^{j2\pi f T_e}) = X(e^{j2\pi(-f)T_e})^*$$

Propriétés (2/2)

- Théorème de la convolution :

Convolution discrète

$$x[n] * y[n] = \sum_i x[i]y[n-i] = \sum_i x[n-i]y[i] = y[n] * x[n]$$

Et on a :

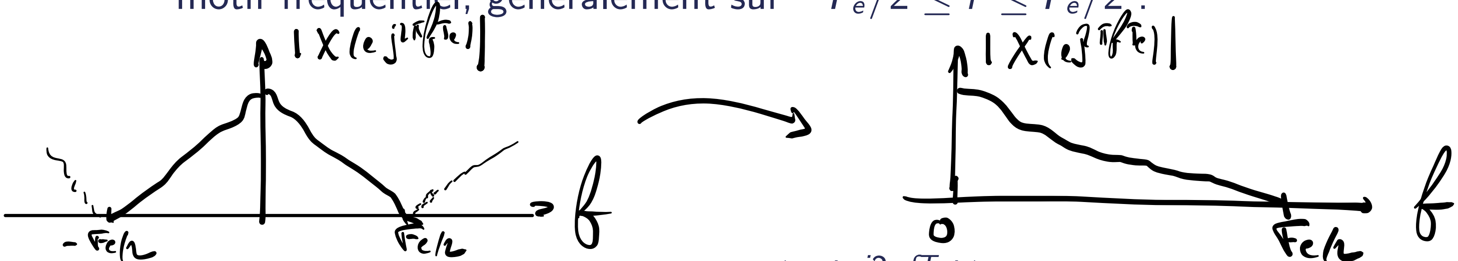
$$x[n] * y[n] \xrightarrow{\text{TFSD}} X(e^{j2\pi f T_e}) \cdot Y(e^{j2\pi f T_e})$$

- Théorème de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} |X(e^{j2\pi f T_e})|^2 \, df \, .$$

Remarques

- $X(e^{j2\pi fT_e})$ est une grandeur **continue en fréquence** (alors que le signal $x[n]$ est bien discret !) ;
- $X(e^{j2\pi fT_e})$ est périodique de période F_e : on ne représente donc qu'un seul motif fréquentiel, généralement sur $-F_e/2 \leq f \leq F_e/2$:



- Pour des signaux à valeurs réelles, $|X(e^{j2\pi fT_e})|$ est symétrique : on peut donc même s'intéresser qu'au domaine $0 \leq f \leq F_e/2$;
- La TFSD est en fait la série de Fourier de la fonction $X(e^{j2\pi fT_e})$. La TFSD inverse se retrouve donc directement :

TFSD inverse

$$x[n] = \int_{(F_e)} X(e^{j2\pi fT_e})e^{j2\pi nfT_e}\mathrm{d}f$$

Relation TFSC / TFSD

On rappelle :

$$X(f) = \int x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \qquad X(e^{j2\pi fT_e}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi nfT_e}$$

Et l'échantillonnage nous a montré que $X_e(f) = F_e \sum_k X(f - kF_e)$.

Ainsi, La TFSD $X(e^{j2\pi fT_e})$ s'obtient à partir de la TFSC $X(f)$ en effectuant les opérations suivantes :

- on normalise la TFSC par le facteur F_e ;
- on périodise la fonction avec la période F_e.

On obtient aussi la TFSC $X(f)$ à partir de la TFSD $X(e^{j2\pi fT_e})$ en faisant les opérations suivantes :

- on normalise par le facteur T_e ;
- on limite la bande de fréquences entre $-F_e/2$ et $F_e/2$.

Exemple de calcul

Soit le signal :

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{par } n < 0 \\ a^n & \text{par } n \geq 0 \end{cases} \qquad (|a| < 1)$$

$$X(e^{j2\pi f T_e}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n T_e} = \sum_{n \geq 0} a^n e^{-j2\pi f n T_e}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(a e^{-j2\pi f T_e}\right)^n \qquad \left(\sum_{n=0}^{N-1} \lambda^n = \frac{1-\lambda^N}{1-\lambda} \right)$$

$$\text{Or} \quad \sum_{n \geq 0} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda} \qquad (|\lambda| < 1)$$

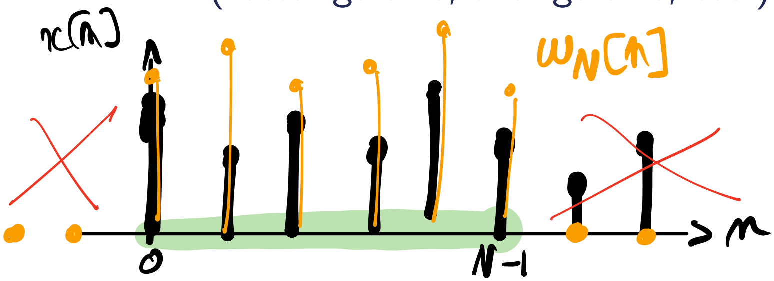
$$\Rightarrow X(e^{j2\pi f T_e}) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f T_e}}$$

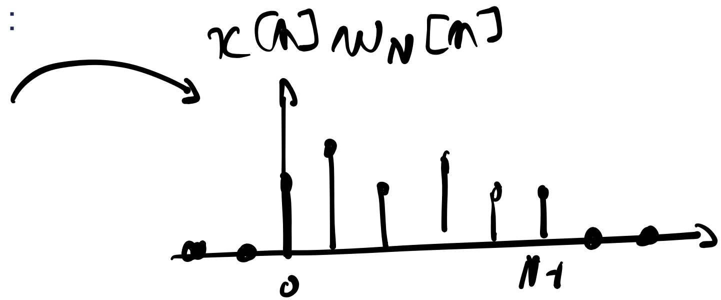
Transformée de Fourier discrète / FFT

Vers la transformée de Fourier discrète (1/2)

La définition de la TFSD indique qu'il est nécessaire d'observer le signal dont on souhaite le contenu fréquentiel sur une durée infinie . . . en pratique, c'est évidemment impossible :

- en pratique, on *observe* le signal *à travers* une **fenêtre d'observation** $w_N[n]$ (rectangulaire, triangulaire, etc.) :





- cette fenêtre de N points est nulle sauf entre 0 et $N-1$. On peut donc limiter la somme infinie initiale :

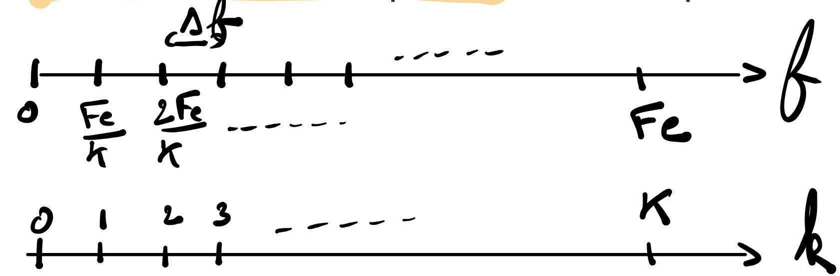
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \sum_{n=0}^{N-1}$$

Vers la transformée de Fourier discrète (2/2)

Enfin, le résultat de la TFSD est une courbe continue en fréquence . . . dont il nous faut l'expression formelle pour l'étudier : comment peut-on alors l'approximer numériquement ?

- on ne calcule que la valeur d'échantillons en fréquence, de sorte que :

$$f \longrightarrow k\,\Delta f = k\,\frac{F_e}{K}$$



On aboutit alors à la définition de la **Transformée de Fourier Discrète** (TFD) :

Définition TFD

$$X_{N,K}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w_N[n]x[n]e^{-j2\pi\frac{nk}{K}}, K \geq N$$

$$e^{-j2\pi f n T_e} \longrightarrow e^{-j2\pi k \frac{\cancel{F_e}}{K} n \cancel{T_e}} \quad (=1)$$

Lien avec la TFSD + TFD inverse

La construction de la TFD à partir de la TFSD nous indique donc :

- la TFD est la même chose que la TFSD calculée en des valeurs de fréquences particulières $f = kF_e/K$
- la TFD peut être interprétée comme une version *échantillonnée* de la TFSD avec un pas en fréquence égal à F_e/K

... pour le signal d'intérêt $w_N[n]x[n]$ à durée limitée (défini sur N points).

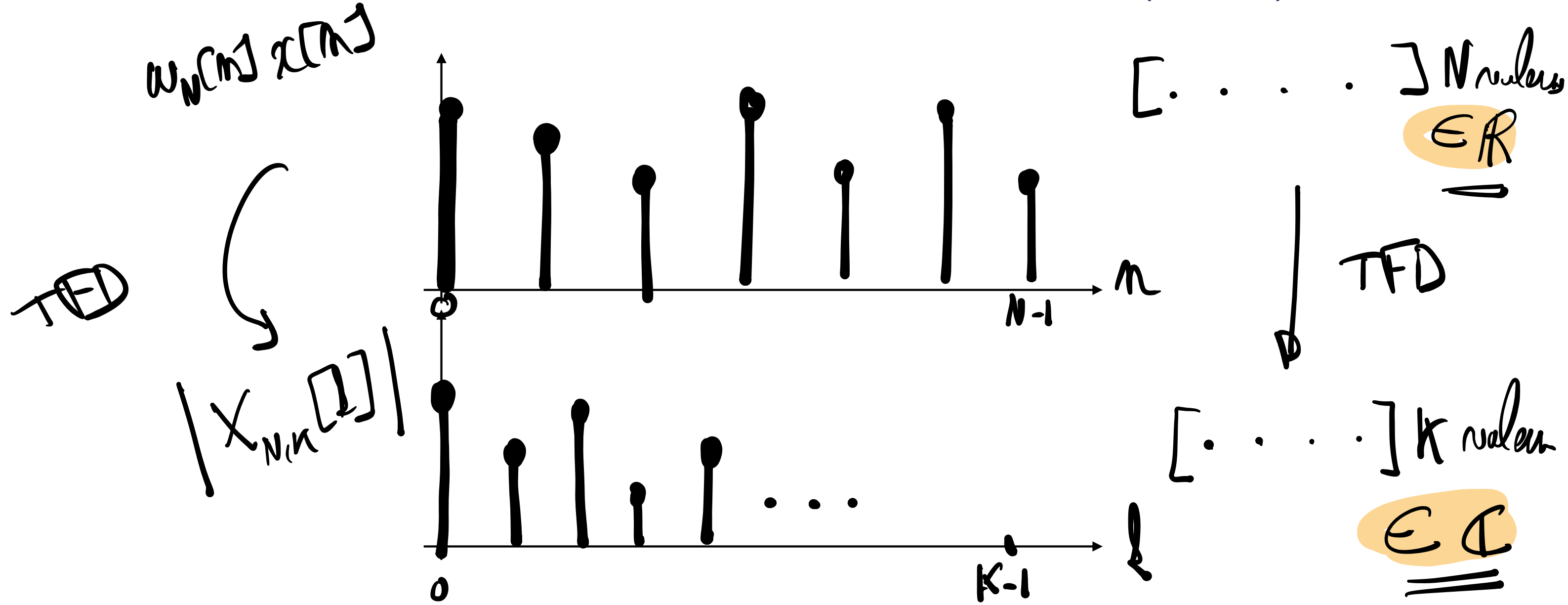
On peut bien sûr définir une TFD inverse permettant de revenir, partant de K échantillons fréquentiels, à une signal sur N points :

TFD inverse

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{K-1} X_{N,K}[k] e^{j2\pi \frac{nk}{K}}$$

Comprendre la TFD

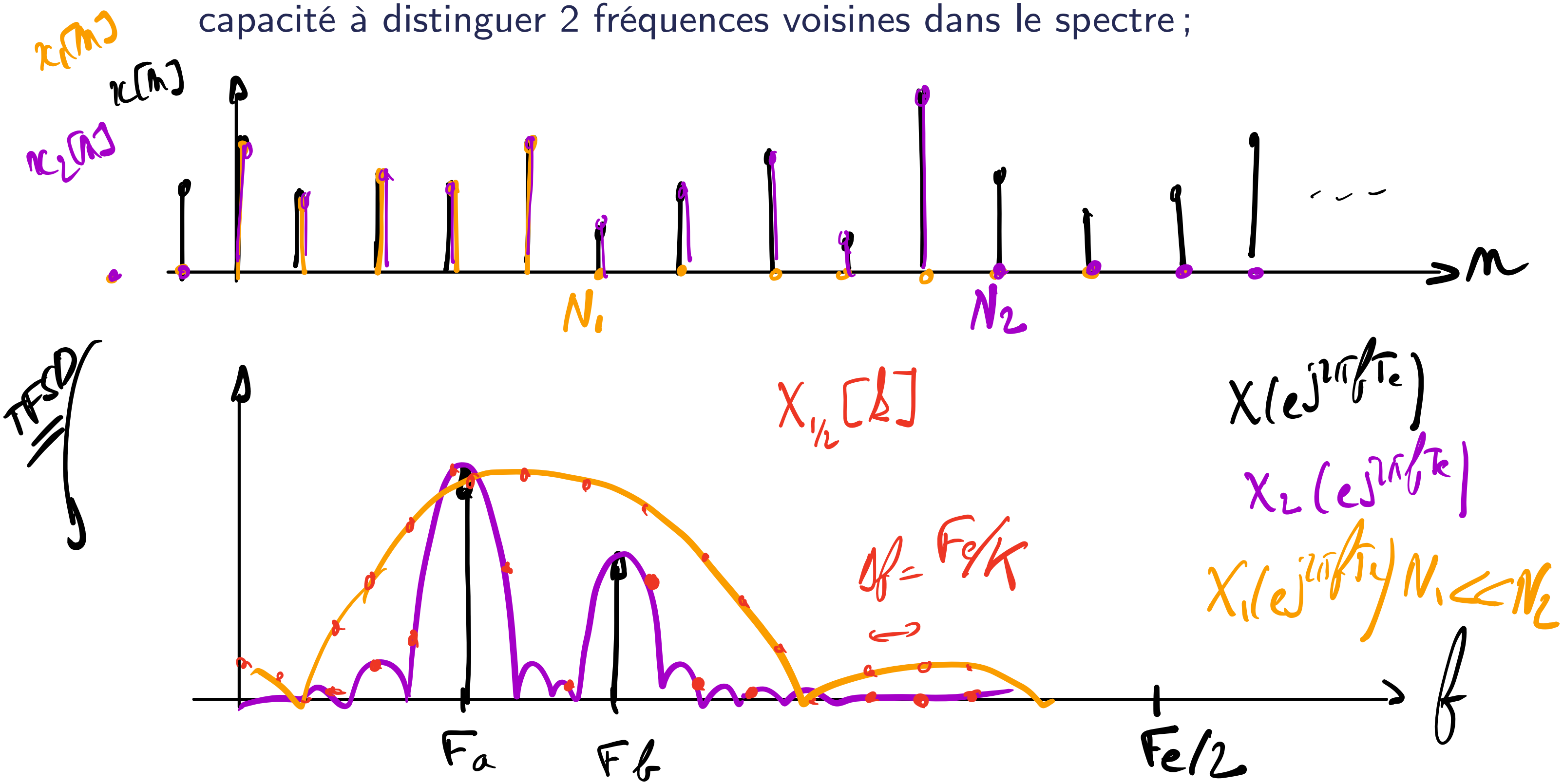
- la TFD est toujours périodique, *de période* $\cancel{F_e}$ K : on ne s'intéresse donc qu'aux valeurs entre 0 et $\cancel{F_e}$ K (exclue) ; $[0; K-1]$
- la TFD est une grandeur discrète en fréquence : on ne récupère donc que des valeurs complexes régulièrement réparties entre 0 et F_e (exclue) $[0; \frac{K-1}{K} F_e]$
- la TFD est donc une opération (réversible) qui transforme un vecteur de N échantillons en temps (le signal pondéré par la fenêtre d'observation) en un autre vecteurs de K valeurs complexes en fréquences ($K \geq N$) :



Choix des paramètres de la TFD (1/3)

On constate que la TFD dispose de **3 paramètres** N**,** w **et** K :

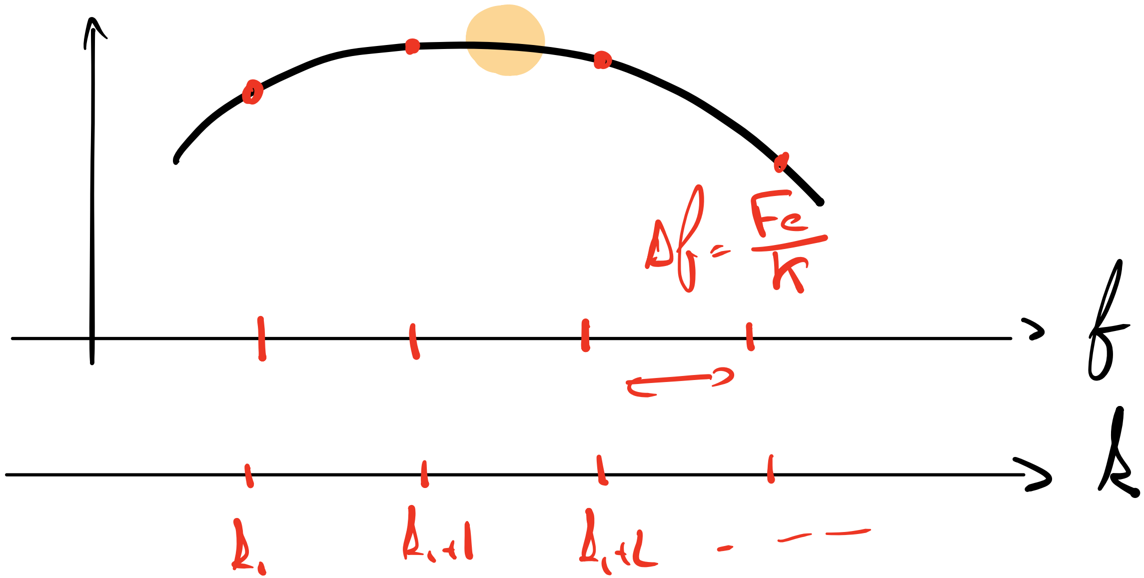
- N et w : c'est le nombre de points N de la fenêtre d'observation w. Les deux permettent de régler la **résolution** de l'analyse en fréquence, i.e. la capacité à distinguer 2 fréquences voisines dans le spectre ;



Choix des paramètres de la TFD (2/3)

On constate que la TFD dispose de **3 paramètres** N**,** w **et** K :

- K : c'est le nombre de point de l'analyse en fréquence. Il permet de régler la **précision** de l'analyse en fréquence.



$\Delta f = Fe/K$: précision.

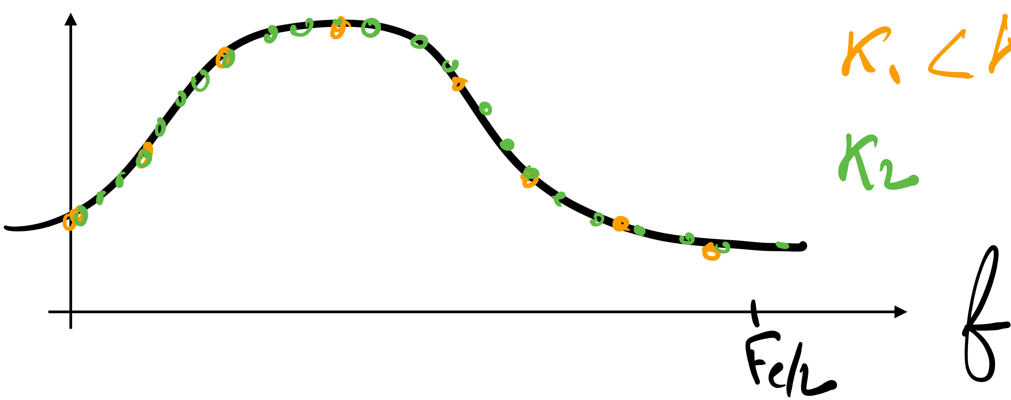
Choix des paramètres de la TFD (3/3)

En pratique, on choisit toujours $K \geq N$:

- si $K = N$: le nombre de points du signal analysé et strictement égal au nombre de points en fréquence ;
- si $K \geq N$: alors le résultat de l'analyse en fréquence est identique à l'analyse en fréquence du signal d'intérêt sur N points, complété de $K - N$ échantillons nuls. On fait alors du **bourrage de zéros** (*zero padding*).

$$\begin{aligned} X_{N,K}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} w_N[n]x[n]e^{-j2\pi\frac{nk}{K}} \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} w_K[n]x[n]e^{-j2\pi\frac{nk}{K}} \end{aligned}$$

où $w_K[n] = 0$ pour $N \leq n < K$.



$K_1 < K_2$

K_2

Propriétés

- Linéarité :

$$TFD\left[x_1[n] + \lambda x_2[n]\right] = X_1[k] + \lambda X_2[k]$$

- Translation dans le temps :

$$TFD\left[x[n-n_0]\right] = X[k]\, e^{-j 2\pi \frac{n_0 k}{K}}$$

- Périodicité :

$$X[k + \ell K] = X[k]$$

Convolution

On définit le produit de convolution circulaire $\circledast$ par

Convolution circulaire

$$x[n] \circledast y[n] = \sum_{p=0}^{N-1} x[p]_{/N} y[n-p]_{/N}$$

où $_{/N}$ désigne l'opération *modulo* N. Ainsi, si on a

$$x[n] = \{x[1], x[2], x[3], x[4]\},$$

alors

$$x[n-2] = \{x[3], x[4], x[1], x[2]\}.$$

Et on montre qu'on a alors (pour des signaux de mêmes dimensions) :

Théorème de convolution

$$x[n] \circledast y[n] \xrightarrow{\text{TFD}} X[k]Y[k]$$

FFT

La FFT (Fast Fourier Transform) est un **algorithme de calcul rapide** de la TFD (introduit en 1965 par Cooley et Tuckey). Il permet de réduire drastiquement le nombre d'opérations nécessaires au calcul des valeurs de $X[k]$. Ainsi, pour un signal de $N = 1024$ points :

- la TFD *classique* nécessite environ $N^2 = 1048576$ opérations
- la FFT requiert elle $N \log N \approx 3000$ opérations seulement.

Il existe aujourd'hui de nombreuses variantes algorithmiques optimisées du calcul de la TFD. Souvent, elles nécessitent de travailler sur des nombres de points N et K égaux à des puissances de 2.

$\rightarrow$ *si le signal d'intérêt n'a pas un nombre de points adapté, on utilise très souvent le bourrage de zéros pour arriver à 1024, 2048, 4096, ... échantillons.*

Conclusion

Analyse en fréquence : à retenir

- La FFT est l'outils utilisé **partout** pour analyser en fréquence un signal numérique ;
- L'analyse en fréquence retourne cette fois un vecteur complexe sur K points, et non plus un résultat analytique (une courbe par exemple) ;
- 3 paramètres permettent d'affiner l'analyse :
  - La durée et forme de l'observation : influence la **résolution** de l'analyse,
  - Le nombre de point de laFFT : influence la **précision** de l'analyse.