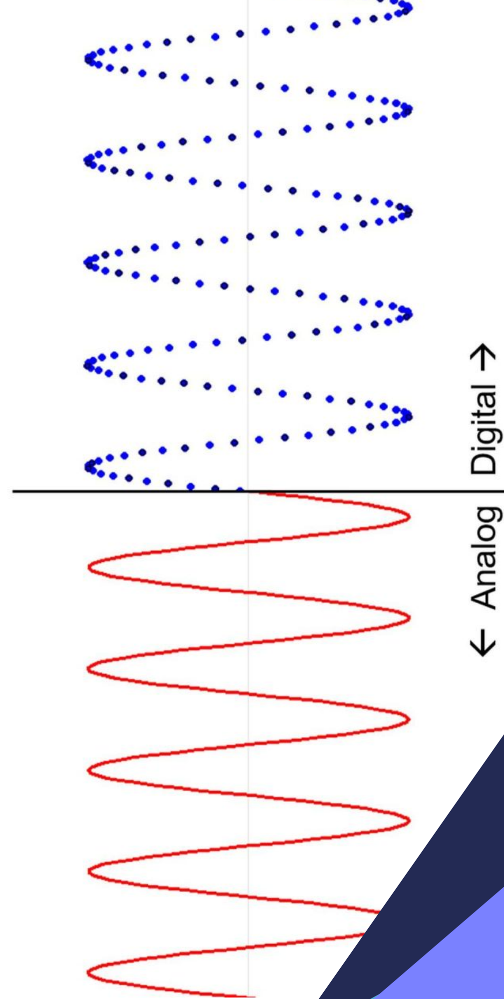
MU4MEN01 : TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE

Cours 2 : échantillonnage

21 septembre 2021



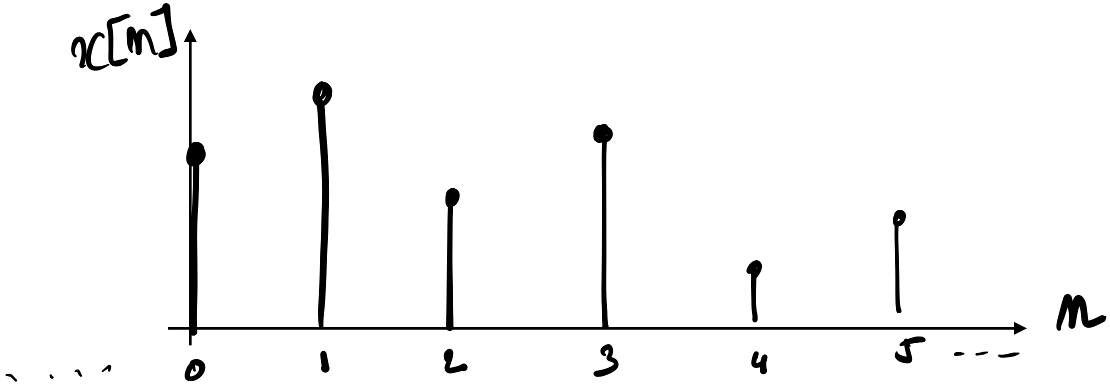
Sylvain Argentieri

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

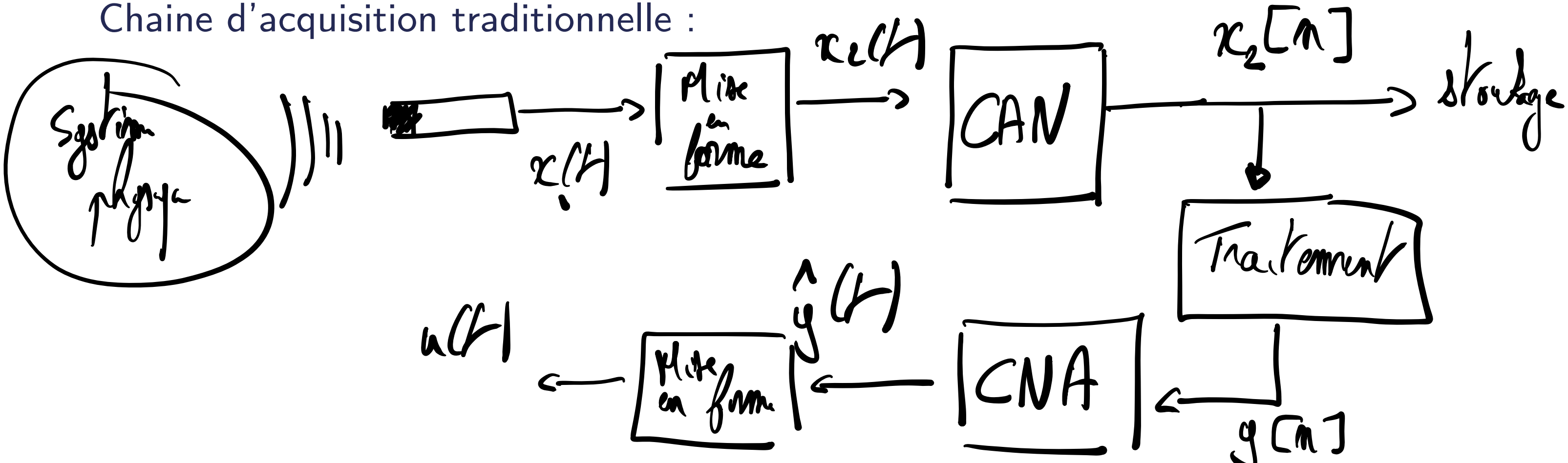
Introduction et rappels

Représentation et notations

On rappelle que les signaux numériques, notés $x[n]$, sont représentés de la façon suivante :



Chaine d'acquisition traditionnelle :



Passage de l'analogique au numérique, et du numérique à l'analogique

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

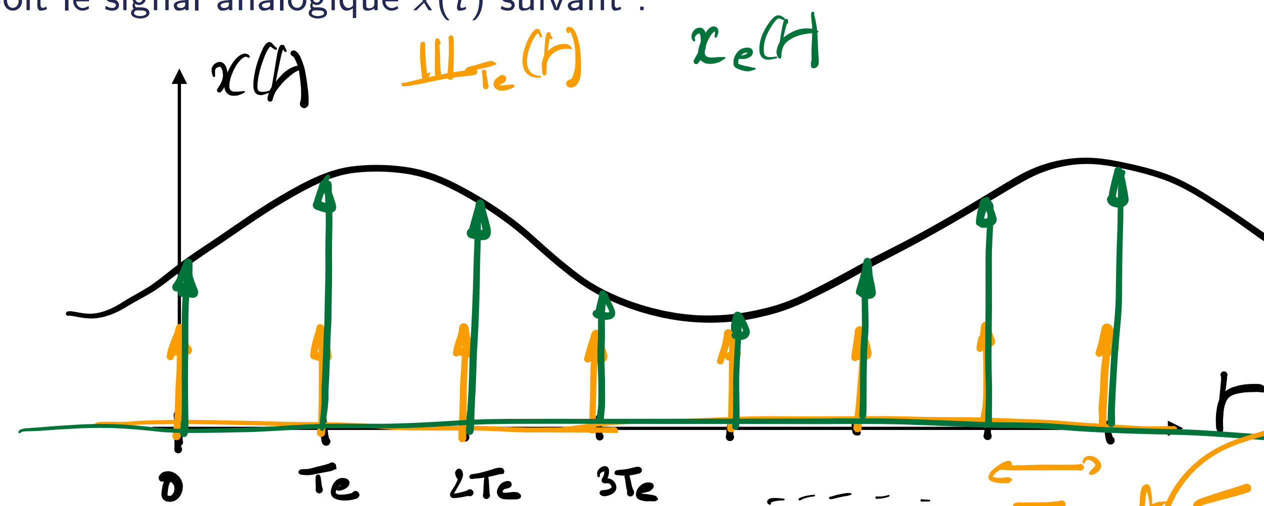
- Ce passage nécessite une étape de **conversion analogique/numérique ou numérique/analogique**, habituellement réalisées par des composants électroniques dédiés (ADC ou DAC) ;
- Ces composants ne seront **pas** étudiés ici, nous nous focaliserons uniquement sur leurs effets théoriques, et en proposerons des modèles (très) simplifiés ;
- Nous allons nous appuyer sur toutes les bases théoriques du signal analogique : **il faut les avoir en tête** !

Echantillonnage : du monde analogique au monde numérique

Echantillonnage idéal

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Soit le signal analogique $x(t)$ suivant :



T_e et $F_e = \frac{1}{T_e}$

On introduit 3 nouvelles grandeurs :

- la **période d'échantillonnage** T_e : elle représente la période à laquelle nous allons nous intéresser aux valeurs du signal analogique, appelés **échantillons** du signal,
- le **peigne de Dirac** $\text{Ш}_{T_e}(t) = \sum_n \delta(t - nT_e)$, signal analogique théorique qui modélise la prise d'échantillons tous les T_e,
- le **signal échantillonné** $x_e(t)$, signal analogique intermédiaire qui permet de comprendre l'effet de l'échantillonnage.

Signal échantillonné

Définition

$$x_e(t) = x(t) \times Ш_{T_e}(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Attention : le signal échantillonné $x_e(t)$ est toujours un signal analogique ! On peut donc avoir une idée de son contenu fréquentiel grâce à la transformée de Fourier :

$$X_e(f) = TFSC[x_e(t)] = TFSC[x(t) \times Ш_{T_e}(t)]$$

$$= TFSC[x(t)] * TFSC[Ш_{T_e}(t)]$$

$$= X(f) * F_e\, Ш_{F_e}(f) = X(f) * F_e \sum_k \delta(f - kF_e)$$

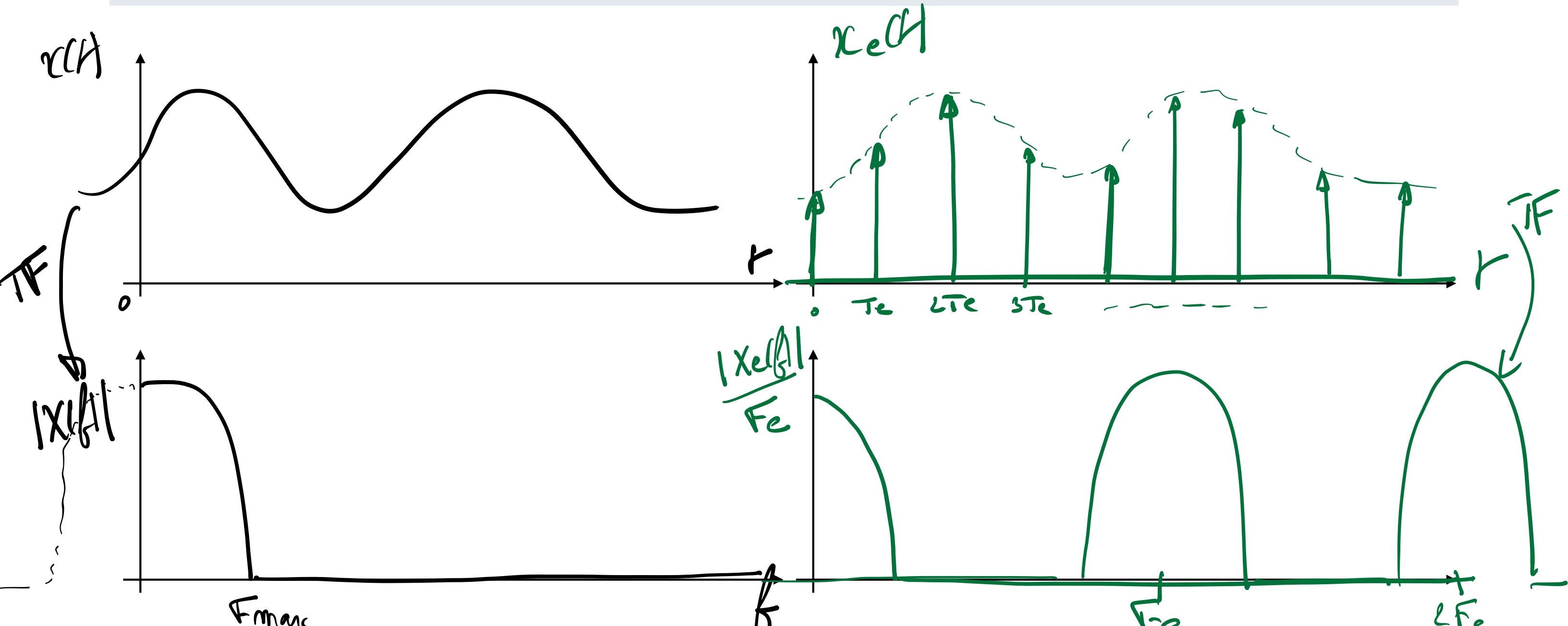
$$= F_e \sum_k X(f) * \delta(f - kF_e) = F_e \sum_k X(f - kF_e)$$

Spectre du signal échantillonné

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

$F_e(\ldots + X(f+F_e) + X(f) + X(f-F_e) + X(f-2F_e) + \ldots)$

$$X_e(f) = F_e \sum_k X(f - kF_e),$$ avec $F_e = 1/F_e$ **la fréquence d'échantillonnage**

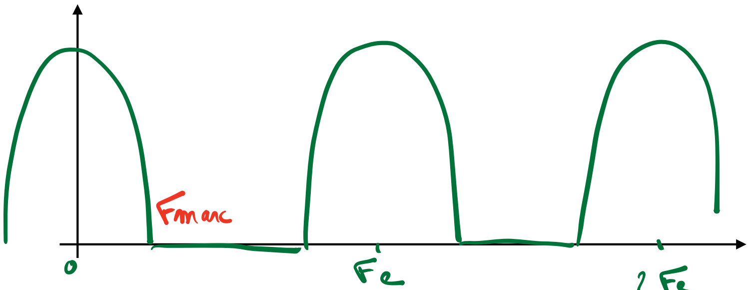


Le contenu fréquentiel d'un signal échantillonné (et par extension, d'un signal numérique) est donc **toujours périodique, de période** F_e.

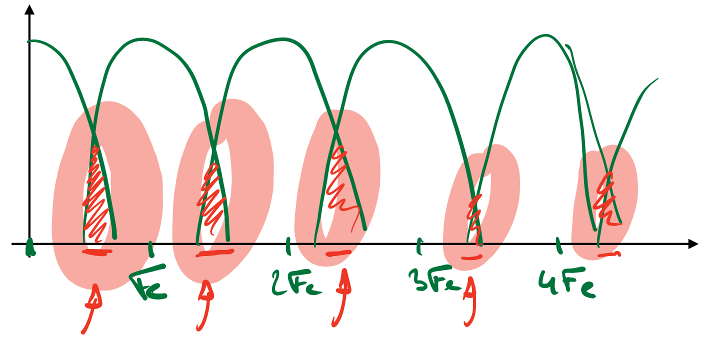
Théorème de Shannon (1/2)

2 cas peuvent se présenter, selon la valeur de F_e :

Quand tout se passe bien :



Hum . . . il y a un soucis :



Il est donc nécessaire que :

Théorème de Shannon

$$F_e \geq 2F_{\max}$$

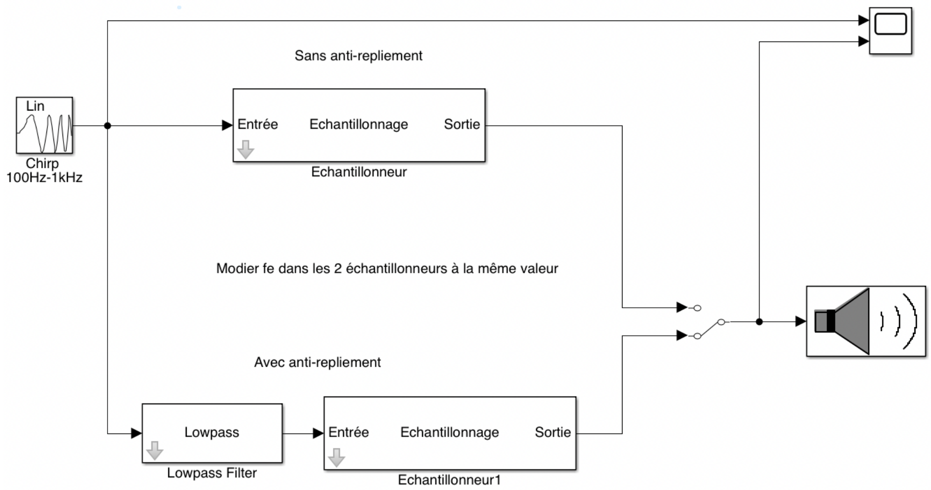
- si le théorème de Shannon n'est pas respectée, alors la périodisation du motif spectral conduit à un phénomène de **repliement spectral** irrécupérable ,
- mais comment choisir $F_{\max}$?

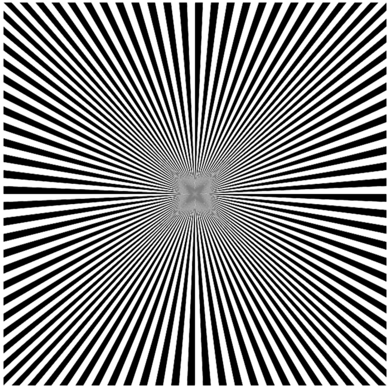
Théorème de Shannon (2/2)

Si le spectre du signal n'est pas à **bande limitée** (ce qui est pour ainsi dire *toujours* le cas), il faut introduire un **filtre anti-repliement** en amont de la conversion analogique/numérique :

- c'est un filtre analogique **passe-bas**
- sa fréquence de coupure F_c permet de définir $F_{\max} = F_c$.

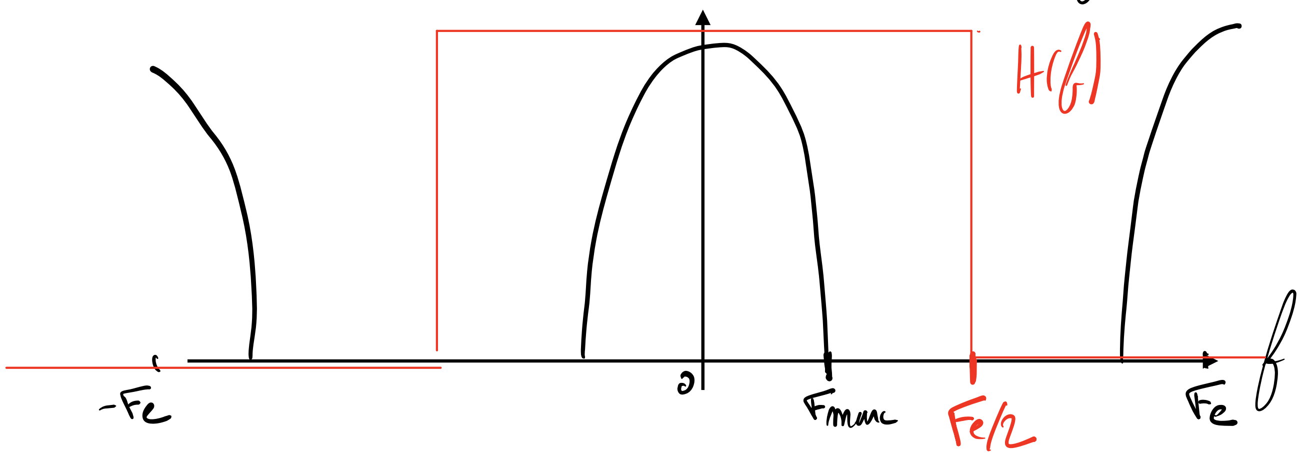
Illustrations pratiques :





Interpolation : du numérique à l'analogique (1/3)

D'un point de vue spectral, le problème est "simple" : $X_e(f)$



Mise en équation :

$$Y(f) = H(f)\, X_e(f) = \hat{X}(f)$$

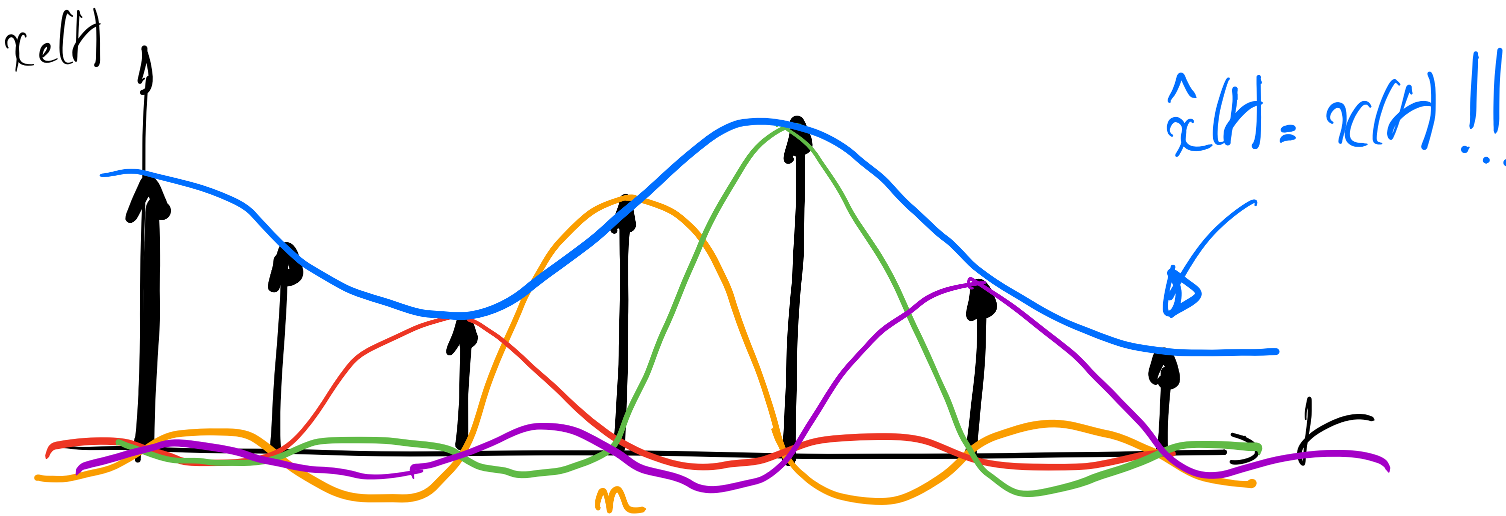
$$\Rightarrow \quad \hat{X}(f) = Rect(f) \times X_e(f) \quad \rightarrow \text{TFSC Inverse}$$

$$\hat{x}(t) = \cancel{F_e}\, \mathrm{sinc}(\pi F_e t) * \cancel{T_e}\, x_e(t)$$

Interpolation : du numérique à l'analogique (2/3)

On $x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\,\delta(t - nT_e)$

Donc $\boxed{\underbrace{\hat{x}(t)} = \sum_n x(nT_e)\,\mathrm{sinc}(\pi F_e(t - nT_e))}$

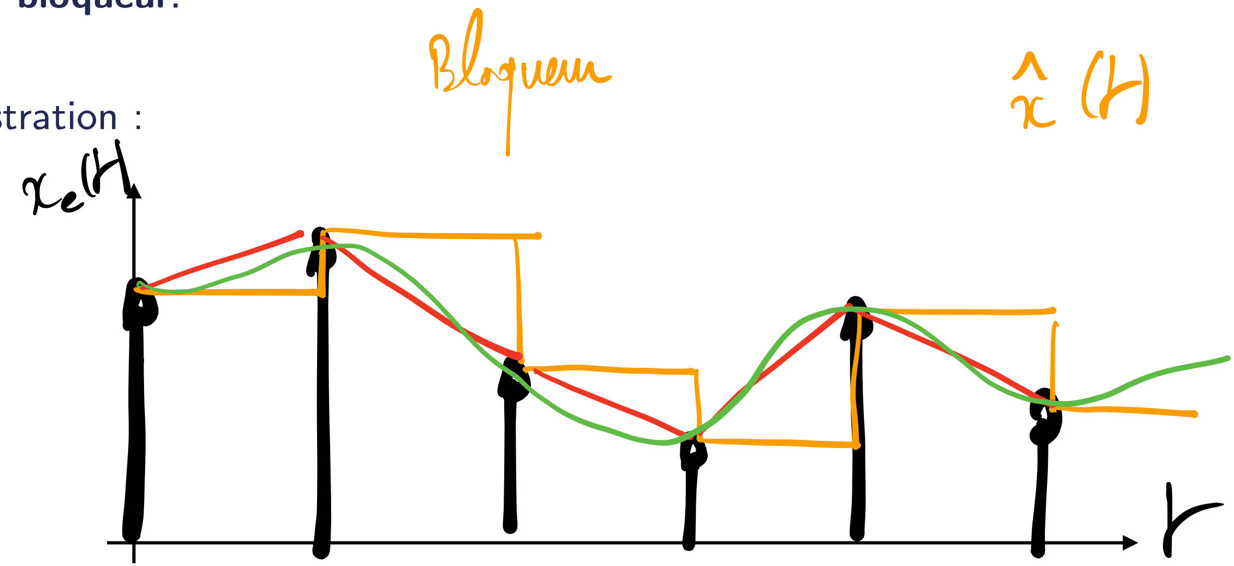


Interpolation : du numérique à l'analogique (3/3)

Problème :

- le filtre idéal, rectangulaire n'est **pas réalisable** : il n'est **pas causal** !
- on le remplace en pratique par un **interpolateur**, dont le plus simple est le **bloqueur**.

Illustration :



Conclusion

Echantillonnage : à retenir

- Le choix de la fréquence d'échantillonnage dépend d'une caractéristique fréquentielle du signal acquis ;
- Théorème de Shannon : $F_e \geq 2 F_{\text{max}}$;
- Le contenu fréquentiel d'un signal échantillonné (par extension numérique) est périodique, de période F_e ;
- On peut reconstruire le signal analogique à partir du signal échantillonné si le théroème de Shannon est vérifié.